



Моделирование в управлении
водными ресурсами

MODELING IN THE MANAGEMENT
OF WATER RESOURCES



Tempus



**ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТАДЖИКИСТАНА**

С.Т. НАВРУЗОВ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
В УПРАВЛЕНИИ
ВОДНЫМИ РЕСУРСАМИ**

Душанбе
«ЭР-граф»
2013

ББК 22.1+22.19Я72
Н-15
УДК 519.87: 627.8

С.Т. Наврузов

Моделирование в управлении водными ресурсами.
– Душанбе: «ЭР-граф», 2013. - 280 с.

Учебное пособие посвящено исследованию проблем управления водными ресурсами путем математического моделирования. В комплексе рассматривается методология разработки инструментария (математический аппарат и средства информационной технологии) для принятия компромиссных решений по рациональному использованию водных ресурсов в бассейнах рек Центральной Азии.

Книга подготовлена при тесном сотрудничестве с проектом “SWAN: Устойчивое управление водными ресурсами в Центральной Азии”, 158982 – TEMPUS-1-2-2009-1-ES-TEMPUS-JPCR, а также при содействии координатора проекта, проректора по учебной работы и управления качеством образования ТУТ, к.э.н., и.о. проф. Тошматова М.Н.

Данное учебное пособие предназначено для магистрантов, связанных с изучением и использованием водных ресурсов, построением и реализацией соответствующих математических моделей, а также для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Рецензенты:

Зав. отделом математического моделирования
Института математики АН РТ, академик, доктор
физико-математических наук, профессор
З.Д.Усманов

Зав. отделом информационно - вычислительных
систем Вычислительного центра им.
А.А.Дородницына РАН, доктор технических наук,
профессор Ф.И.Ерешко

S.T. NAVRUZOV

**MODELING IN
MANAGEMENT OF
WATER RESOURCES**

**«R-graph»
2013**

BBK 22.1+22.19Я72
N-15
YDK 519.87: 627.8

Navruzov S.T.

Modeling in management of water resources. – Dushanbe:
«R-graph», 2013. - 280 p.

The teaching aid is devoted to researching problems of water resources management through mathematical modeling. Methodology of developing the mathematical software and informational technologies for acceptance of compromise decisions on rational use of water resources in basin of the rivers of Central Asia is proposed.

The book has been prepared at the closed cooperation with Project “SWAN: Towards sustainable water resources management in Central Asia”, 158982-TEMPUS-1-2009-1-ES-TEMPUS-JPCR, and collaboration with the project coordinator, vice-rector of academic affairs and education quality PhD in Economic, Acting Professor Toshmatov M.N.

This book is addressed to magisters, workers of managing water-economic bodies, post-graduate students and students of corresponding specialties.

Reviewers:

Head of Mathematical modeling department, Institute of Mathematics of Tajik Academy of Sciences, Full Member of Tajik Academy of Sciences, Dr.Sci.Math., Professor of Mathematics and Informatics Zafar D. Usmanov

Head of Informational computing system department, Dorodnicyn Computing Center of Russian Academy of Sciences, Dr.Sci.Tech., professor Feliks I. Ereshko

ISBN 978-99947-974-6-2

© Navruzov S. T., 2013.

С.Т. НАВРЎЗОВ

**МОДЕЛИРОНӢ ДАР
ИДОРАКУНИИ
ЗАХИРАӢОИ ОБИ
ДАРӢӢО**

Душанбе
«ЭР-граф»
2013

Наврӯзов С.Т.

Моделиронӣ дар идоракунии захираҳои оби дарёҳо.
– Душанбе: «ЭР-граф», 2013. – 280 с.

Китоби мазкур ба тадқиқоти масъалаҳои идоракунии захираҳои оби дарёҳо, таввасути моделсозии математикӣ бахшида шуда дар он методологияи коркарди инструментари (аппарати математикӣ ва васоити технологияи информатсионӣ) барои қабули ҳалҳои мусоҳи-лаомези истифодаи ратсионалии захираҳои оби ҷавзаи дарёҳои Осиёи Марказӣ пешниҳод шудааст.

Китоби мазкур дар ҷамқории зич бо лоиҳаи “SWAN: Идоракунии эътимотнокӣ захираҳои обӣ дар Осиёи Марказӣ”, 158982-TEMPUS-1-2009-1-ES-TEMPUS-JPCR, таъти роҳбарии координатори проект, проректор оид ба таълим ва идораи сифати таъсилот, н.и.и., и.в. проф. Тошматов М.Н. тайёр карда шудааст.

Ин китоб барои магистрантҳои, ки ба омӯзиши истифодаи захираҳои обӣ, сохтан ва тадқиқӣ моделҳои математикӣ машғуланд ва ҷамқунии барои аспирантон ва донишљӯёни соҳаҳои мувофиқ пешбинӣ шудааст.

Тақриздиҳандагон:

Мудири шўъбаи моделсозии математикии Институти математикаи Академияи илмҳои Љумњурии Тољикистон, Академики Академияи илмҳои Љум-њурии Тољикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Усмонов З.Д.

Мудири шўъбаи системаҳои информатсионӣ-њисобкунии Маркази њисоббарории ба номи А.А. Доронитсини Академияи илмҳои Федератсияи Руссия, доктори илмҳои техникӣ, профессор Ерешко Ф.И.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	9
-------------------	---

I. КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Глава 1. Проблемы использования водных ресурсов в речных бассейнах

1.1. Трансграничные реки.....	14
1.2. Проблемы управления водными и энергетическими ресурсами рек Центральной Азии.....	18
1.3. Математическое описание речного бассейна.....	26
1.4. Существо проблемы водodelения на примере модельного речного бассейна.....	37
1.5. Математические модели принятия компромиссных решений при управлении водными ресурсами	42

II. УПРАВЛЕНИЕ ВОДНЫМИ РЕСУРСАМИ

Глава 2. Математические модели управления водохранилищами в речных бассейнах

2.1. Разработка методов построения правил управления водохранилищами.....	58
2.2. Аналитические модели управления водохранилищами	91
2.3. Оптимизационные модели управления водохранилищами ...	113
2.4. Имитационные модели управления водохранилищами	128

III. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Глава 3. Экономические модули оценки использования водных ресурсов

3.1. Модуль зоны планирования.....	163
3.2. Модуль оценки цены на воду.....	171
3.3. Модуль оценки КПД оросительной сети.....	181
3.4. Модуль расчета коэффициентов стресса культуры.....	192
3.5. Модуль расчета потенциальной урожайности.....	202

III. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Глава 4. Информационная система рационального использования водных ресурсов

4.1. Информационная система речного бассейна	211
4.2. Блочно-иерархическая структура информационной Системы	214
4.3. База данных речного бассейна	223
4.4. Географическая информационная система	231
4.5. Информационная система как инструмент принятия Решения.....	249
Заклучение	259
Список литературы.....	261

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время проблема управления водными ресурсами приобрела особую актуальность в связи с острой нехваткой воды во многих регионах мира. По оценкам ряда международных организаций (например, ФАО – Продовольственная и сельскохозяйственная организации ООН), к 2030 году мировые потребности в пресной воде возрастут на 60%, между тем запасы пригодной для питья воды сокращаются вследствие сброса промышленных отходов, общего загрязнения окружающей среды, вырубки лесов и других антропогенных действий.

По некоторым данным [Глобальная экологическая..., 2002], сейчас в мировом масштабе используется 55-60% наличного годового запаса пресной воды, в том числе: 70% мировых ресурсов речных и подземных вод – на орошение, 20% - на нужды промышленности и 10% на бытовые нужды. Прогнозные данные свидетельствуют о том, что в предстоящие 25-30 лет из-за роста численности населения использование мировых запасов пресной воды повысится на 70% и к 2025 году почти 2/3 населения мира будет остро ощущать нехватку воды.

Ситуация обострится в связи с нынешними климатическими изменениями (засухи и наводнения), которые будут в дальнейшем более интенсивными. Всё вышеперечисленное обуславливает новые проблемы по использованию воды как внутри каждой отдельно взятой страны, так и между государствами. При этом не исключено возникновение конфликтных ситуаций [Priscoli, 2003].

Что касается Центральной (Средней) Азии, то с приобретением республиками независимости, здесь возникли проблемы водodelения в бассейнах рек. В постсоветский период республики Центральной Азии направили свои усилия в основном на реформирование своей национальной экономики, укрепление вновь образовавшихся рынков, построение демократии и решение других насущных проблем. Между тем проблема управления и распределения водных ресурсов рек, с учетом новых реалий, осталась за полем зрения и приобрела в настоящее время статус одной из важнейших проблем региона, которая должна быть решена с учетом интересов каждой из сторон, введением переговорных процессов и нахождения компромиссных решений.

Неразрешенность проблем, связанных с управлением и использованием водных ресурсов рек Центральной Азии, связанных в первую очередь с использованием водно-энергетических ресурсов этих рек, становится серьезным препятствием на пути урегулирования многочисленных региональных, внутренних и локальных конфликтов, которые в настоящее время усугубляют взаимоотношения между этими странами.

В этой ситуации анализ вышеназванных проблем, их разумное осмысление, а также нахождение компромиссных решений, как общесистемными математическими средствами, так и возможностями введения переговорных процессов на базе разрабатываемых математических моделей, являются основополагающими факторами, которые могут способствовать взаимопониманию между стран в решении данной проблематики.

Основная цель настоящей книги является методология разработки инструментария (математический аппарат и средства вычислительной техники) для принятия согласованных решений по рациональному использованию водных ресурсов в бассейнах рек на примере Центральной Азии.

Концептуальные положения использования водных ресурсов рек, излагаемые в первой части работы, составляют методологическую основу комплексного подхода к моделированию функционирования водохозяйственных систем (ВХС) на бассейновом уровне, с соблюдением международного права. Обязательным атрибутом решения комплексных водохозяйственных задач является системный анализ, который включает в себя анализ сложной информации различной природы, разработку математических моделей, их компьютерную реализацию и проведение численных экспериментов, а также эвристические процедуры. При этом эвристические, неформальные приемы органично вписываются в процесс принятия водохозяйственных решений.

Основной “единицей” управления водными ресурсами является речной бассейн. В части I книги, наряду с прочими концептуальными положениями, описывается математический портрет речного бассейна. Формализация основных компонентов и структура модели, анализ ситуации и решения о распределении водных ресурсов осуществляется в рамках речного бассейна. Этот портрет используется в дальнейшем для описания динамики водных ресурсов.

В настоящей книги обсуждаются основные аспекты управления водными ресурсами речных бассейнов средствами математического моделирования, которые основываются на аналитических, оптимизационных и имитационных моделях.

Представленная работа охватывает широкое поле проблем. Помимо обсуждавшейся выше части I, посвященной концептуальным основам использования водных ресурсов рек, книга содержит еще три части, включая конкретные модели и задачи управления водными ресурсами рек.

Часть II посвящена методам управления водными ресурсами посредством аккумулирующих емкостей (водохранилищ). Рассматриваются математические модели управления режимом работы водохранилищ, расположенных в речных бассейнах, на основе разумного баланса между интересами различных стран пользователей водных ресурсов в интересах ирригационных нужд и потребностей в производстве гидроэлектроэнергии, а также задачи регулирования речного стока водохранилищами по диспетчерским правилам управления. Среди водопотребителей и водопользователей особо выделено орошаемое земледелие и гидроэнергетика. В книге обсуждается детерминированная модель со стохастической модели приточности, а также примеры практического использования модели.

В части III монографии рассматриваются экономические аспекты использования водных ресурсов речных бассейнов. Обсуждаются методические аспекты проблемы и способы экономической оценки используемой воды. Анализируются также упрощенные модели зоны планирования (ЗП) как один из наиболее сложных классов задач стохастической оптимизации, поскольку неопределенность присутствует как в уравнениях, описывающих состояние системы (это осадки и сток), так и в целевой функции (чистый доход ЗП напрямую связан с колебаниями цен на выращиваемую продукцию на мировом рынке). Отдельные параграфы посвящены: анализу модуля оценки КПД оросительной сети в зависимости от уровня средневзвешенной удельной капложений на модернизацию внутрихозяйственной оросительной сети; определению коэффициента стресса культуры от дефицита воды и засоленности почв; модулю расчета потенциальной урожайности основных культур как осредненной для выбранной зоны планирования, с учетом типа почв и климатической зоны.

Заключительная часть монографии (глава IV) посвящена методическим основам построения геоинформационной системы как инструмента для поддержки процесса принятия решений по планированию и управлению водными ресурсами речных бассейнов.

Поддержка принятия решений с использованием математического аппарата и компьютерных технологий содержит такие атрибуты больших компьютерных систем, как собственно программные реализации математических моделей, базы данных, способы получения и передачи структуризированной информации, методы организации дружеского интерфейса, средства визуализации и т.д. Подобные системы принято называть системами поддержки принятия решений (СППР) [Пряжинская и др., 2002].

Затронутые в монографии проблемы раскрываются не в равной степени. Глубоко проанализированы такие темы, как математические методы управления водохранилищами, методика построения диспетчерских правил, методология создания геоинформационной СППР и др., которые доведены до практических расчетов. Некоторые задачи описаны лишь в теоретическом плане с целью показать, не только пути их решения, но и представить, во-первых, многообразие проблем управления водными ресурсами рек, и, во-вторых, оценить методологическое единство подходов к их решению.

Автор выражает глубокую благодарность академику АН Республики Таджикистан, доктору физико-математических наук, профессору З.Д. Усманову и доктору технических наук, профессору Ф.И. Ерешко за труд по рецензированию книги и полезные замечания.

Часть I
КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ
ПОЛОЖЕНИЯ

Г л а в а 1

ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ В РЕЧНЫХ БАССЕЙНАХ

Последнее время характеризуется нарастанием напряженности по вопросам обеспечения людей чистой питьевой водой. Мировое сообщество обеспокоено тем, что человечество может столкнуться с проблемой нехватки воды во многих частях мира, которое может стать причиной ряда национальных и международных конфликтов. Проблема становится еще труднее, когда страны, расположенные вдоль трансграничной реки (река, которая проходит через территорию нескольких государств), стремятся использовать водные ресурсы этих рек в своих национальных интересах, порой забывая о регулировании реки на базе международных прав. Это привело к пониманию того, что необходимо реализовать комплексный подход к управлению водными ресурсами трансграничных рек на основе международного права.

В данной главе анализируются вопросы использования водных ресурсов рек в ракурсе исторического опыта для некоторых характерных трансграничных бассейнов. Рассматриваются особенности управления использованием водных ресурсов трансграничных рек, играющие существенную роль при выработке концептуальных подходов к управлению трансграничных рек. Разрабатываются математические модели принятия компромиссных решений при управлении водными ресурсами с учетом интересов государств. Далее анализируются проблемы управления водными и энергетическими ресурсами трансграничных рек Центральной Азии, которые в настоящее время усугубляют взаимоотношения между этими странами.

1.1. Трансграничные реки

Реки, как и озера и другие акватории внутри материков, играют важную роль во многих главных природных процессах на нашей планете. Значение же их в жизни человечества на протяжении всей его истории колоссально. Примеры Нила (рис. 1-а), Волги, Хуанхэ, Янцзы, Дуная, Рейна (рис. 1-б), Днепра, Ганга, Инда, Тигра, Евфрата, Меконга (рис.1-в) и многих других рек широко известны. Большинство рек целиком протекает в пределах одной страны,

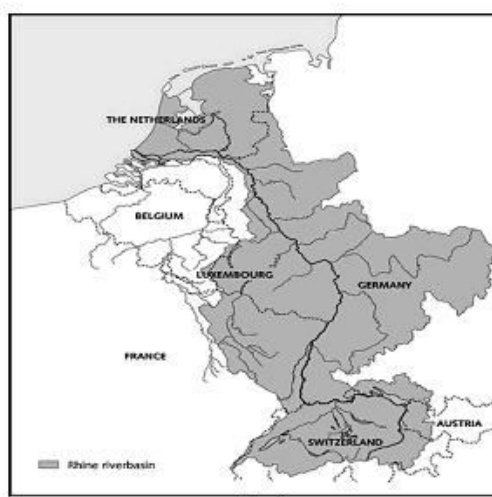
внутри ее государственных границ. В других случаях реки составляют границу или часть границы между двумя или более государствами. К водным ресурсам трансграничных рек относятся водные потоки трансграничных рек, текущие в естественных руслах и питающиеся за счет поверхностного и подземного стока с их бассейнов.

К трансграничным водным ресурсам относятся любые поверхностные или подземные воды, которые обозначают, пересекают границы между двумя и более государствами или расположены в таких границах. В тех случаях, когда трансграничные воды впадают непосредственно в море, их пределы ограничиваются прямой, пересекающей их устье между точками, расположенными на линии малой воды на их устье. Такое определение трансграничных вод дается в Конвенции ООН по охране и использованию трансграничных водотоков и международных озер [Конвенция ЕЭК ООН..., 1992].

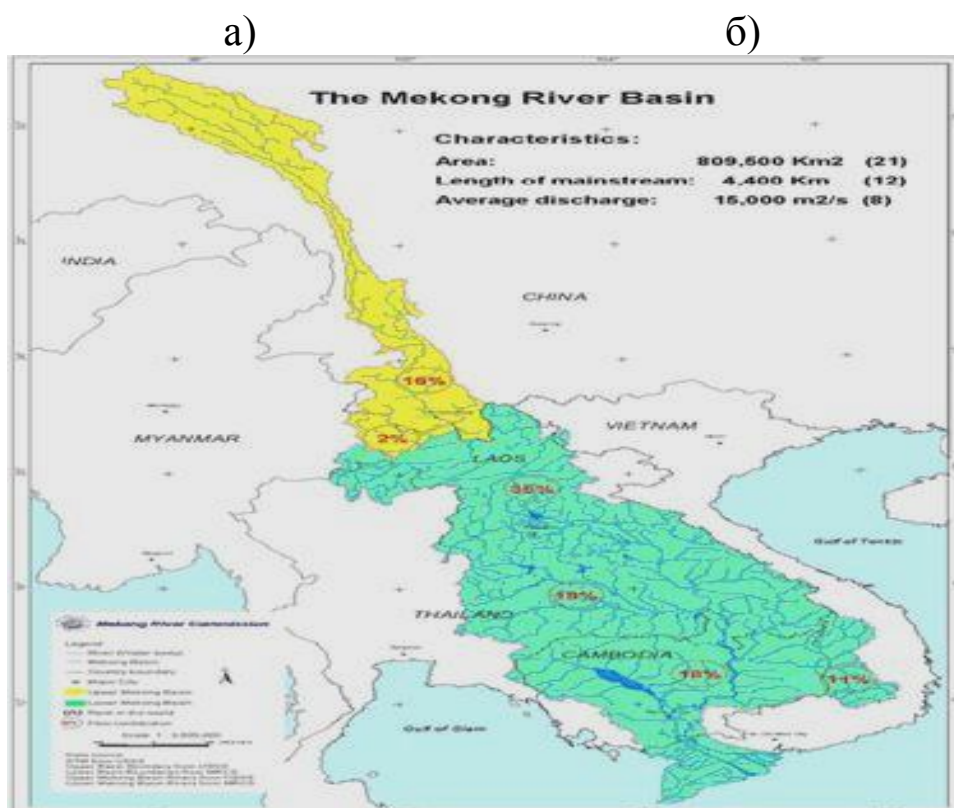
Река Рио-Гранде (Рио-Браво-дель-Норте), начинаясь в США, далее на протяжении 2000 км служит границей между США и Мексикой и одновременно принимается географами и историками как северная граница крупного культурного региона - Латинской Америки. В мире немало и других пограничных рек: участки Дуная служат границей между Австрией и Словакией, Румынией и Болгарией, Прута - между Румынией и Молдавией, Одера и Нейсе - между Германией и Польшей, Пянджа - между Таджикистаном и Афганистаном, Ялунзяна - между Китаем и КНДР, Конго - между Конго и Демократической Республикой Конго и т. д. Наиболее длинная среди них Амур - граница между Россией и Китаем на протяжении 3469 км.



р. Нил



р. Рейн



в)

Рис. 1. Трансграничные бассейны реки: а) - Нил, б) - Рейн, в) - Меконга¹.

Множество рек принадлежат своими участками двум странам (государствам), а то и нескольким. Эти реки, например, Нил - 10 стран, принято считать, причем и официально, трансграничными реками. Из многих тысяч рек в Европе, Азии, Африке и Америке таковых примерно 160-200, не считая тех, которые лишь весьма короткими участками заходят в другие страны или касаются их [World Bank..., 1996].

Число трансграничных рек не остается постоянным: оно, как правило, изменяется в связи с изменениями государственных границ. В 1978 г. насчитывалось 214 международных бассейнов; а в 2005 г их было уже 261, которые пересекают политические границы двух или более стран. Эти бассейны охватывают 45,3% поверхности Земли, на которой проживает около 40% населения мира и расположено 80% мирового речного стока (см. рис 2). Так, в последнее десятилетие после распада СССР, СФРЮ, ЧССР многие

¹ Интернет источник: www.cawater-info.net

внутренние реки на этих территориях приобрели статус международных.

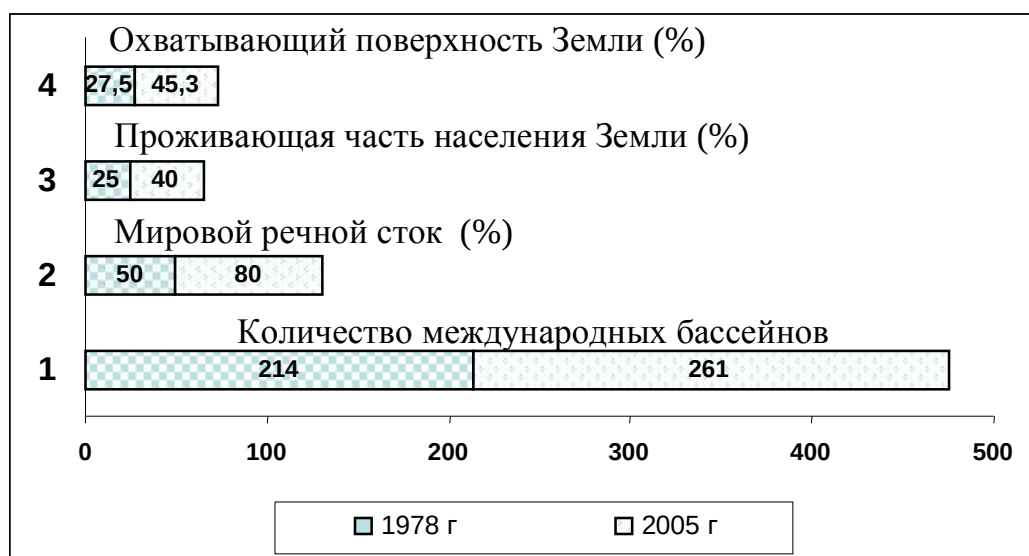


Рис. 2. Сравнительная карта международных бассейнов

Особенно обострилась ситуация по использованию водных и энергетических ресурсов в Центральной Азии. Известно, что истоки почти всех значительных рек этого региона (Сырдарьи, Нарына, Кызыл-Су, Таласа, Чаткала, Амударьи, Вахша, Пянджа, Ях-Су, Обихингоу и др.) находятся в горах Киргизии и Таджикистана. Там в годы советской власти были созданы крупные водохранилища (Токтогульское, Кайраккумское, Нурекское и др.) и ГЭС, работающие на весь регион. Однако все расходы на их содержание (а это сотни миллионов долларов за год) несут Киргизия и Таджикистан, Узбекистан же и Казахстан, получающие наибольшую долю речного стока, пользуются водой бесплатно. До 1991 г. положение было иным: Узбекистан и Казахстан компенсировали затраты Киргизии в плановом порядке, поставляя ей ежегодно 1 млн. т каменного угля, 1 млрд. м³ природного газа и 400 тыс. т мазута. Теперь же соседи Киргизии продают ей уголь, нефть и газ по высоким мировым ценам. Парламент Киргизии, считая современную ситуацию несправедливой, еще в 1997 г. высказался за установление хотя бы минимальных ставок на сток речных вод за пределы республики. Это, по расчетам, могло бы покрыть расходы республики на поддержание в рабочем состоянии гидротехнических сооружений в горах, а также на покупку угля и

газа. Однако положение остается прежним: соседние государства предпочитают получать речные воды даром. К тому же водные ресурсы в этих странах, особенно в аграрном комплексе Узбекистана, расходуются крайне неэкономно и нерационально. Воды бассейнов рек Сырдарьи и особенно Амударьи все менее и менее доходят до усыхающего Аральского моря (рис. 3).

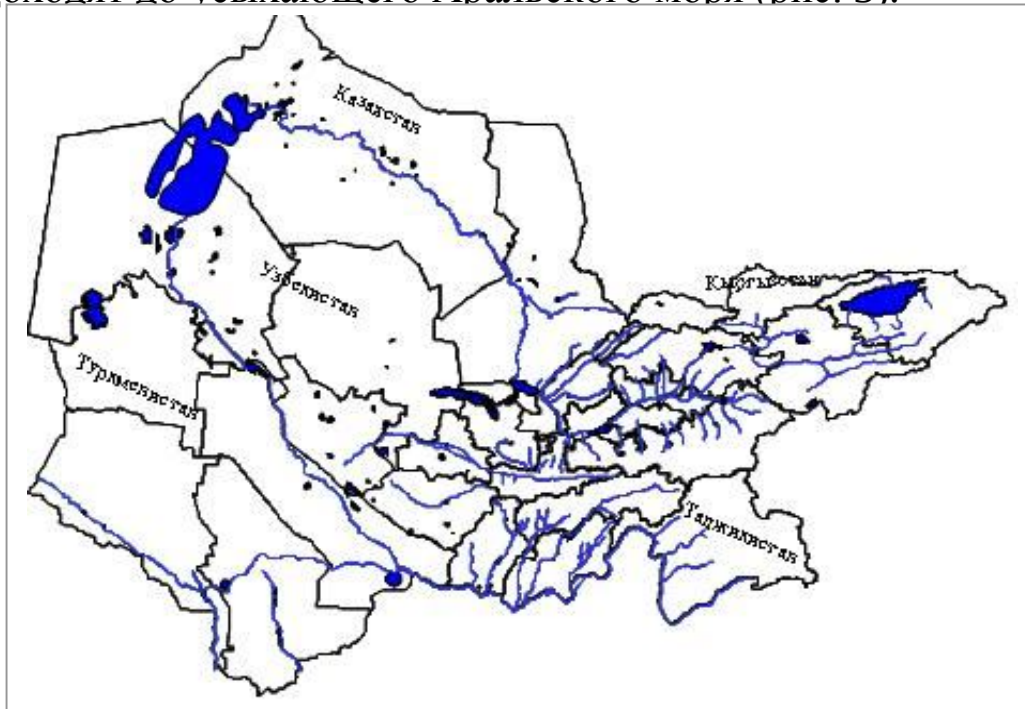


Рис. 3. Бассейн Аральского моря.

В 1997 г. ООН рассмотрела конвенцию о международных водах, которая включает два основополагающих принципа их распределения: один - справедливое и разумное использование и второй - обязательство не причинять значительного ущерба. Против конвенции проголосовали Турция, Китай и Бурунди [Priscoli, 2003]. Несмотря на заключение многочисленных соглашений по использованию международных вод, еще не решены важнейшие конкретные вопросы: механизмы и стандарты контроля при осуществлении положений соглашений, условия распределения водных ресурсов с учетом имеющихся ресурсов и спроса.

1.2. Проблемы управления водными и энергетическими ресурсами трансграничных рек Центральной Азии

Существо проблемы и ее анализ. Проблемы совместного управления водными ресурсами трансграничных рек и энергетики для государств Центральной Азии (ЦАР) являются важнейшими

факторами, которые определяют практически все аспекты национальной и региональной экономики. В бытность существования Советского Союза регион отличался высокой водной и энергетической взаимозависимостью, которая была географически и исторически обусловлена условиями формирования и использования трансграничных рек, а также структурой единой экономики.

Прежний механизм централизованного управления водными ресурсами обеспечивал надежную работу всех гидротехнических сооружений, координируя решений задач по региональному водопользованию при многолетнем регулировании речного стока. Этот механизм являлся гарантом устойчивого функционирования аграрного сектора, основанного на орошаемом земледелии, и безопасного пропуска воды в низовья рек в зимне-весенний период. В каждой республике поддерживался рациональный баланс топливно-энергетических ресурсов, которые способствовали регулированию поставок энергоносителей и соответственно распределению водных ресурсов между республиками.

С распадом союзного государства и прекращением так называемой схемы водно-энергетического обмена в бассейнах трансграничных рек Сырдарья и Амударья создалась угроза дезорганизации сложившегося порядка водопользования и вероятность усиления напряженности во взаимоотношениях между странами Центральной Азии. В этой ситуации наиболее подходящим решением возникшей проблемы может быть сохранение ранее существующих взаимоотношений соответствующих структур по регулированию и распределению водных и энергетических ресурсов на новом межгосударственном уровне. Именно эта идея стала основополагающей, при создании Межгосударственной координационной водохозяйственной комиссии (МКВК), соглашение о которой было подписано 18 февраля 1992 г. странами Центральной Азии. Этот орган объединял водохозяйственные структуры пяти государств, и рабочими органами которого являются бассейновые водохозяйственные объединения - БВО «Сырдарья» (Ташкент, Узбекистан) и «Амударья» (Ургенч, Узбекистан), Научно-информационный центр (НИЦ) МКВК (Ташкент, Узбекистан), секретариат МКВК (Ходжент, Таджикистан). МКВК вошла в структуру Международного фонда спасения Арала (МФСА) в 1993 г.

Однако, несмотря на то, что на МКВК было возложено решение многих вопросов, связанных с межгосударственным

вододелением, тем не менее, она не располагала необходимыми правовыми и экономическими возможностями и часто ее решения носили рекомендательный характер. Отсутствие механизма, базирующегося на правовые и экономические аспекты водно-энергетического сектора, не позволяет решать проблемы совместного использования трансграничных рек. Более того, в последнее время наблюдается тенденция к разработке собственных стратегий водопользования каждой из сторон, участвующих в процессе вододеления в бассейне трансграничных рек.

Между тем основной водный потенциал Центральной Азии сосредоточен в бассейне двух крупных среднеазиатских рек Амударья (рис.4) и Сырдарья (рис. 5), которые обеспечивают потребности населения пяти центрально-азиатских государств (Казахстана, Кыргызстана, Таджикистана, Туркменистана и Узбекистана), и от правильного выбора стратегий управления их водными ресурсами зависят взаимоотношения стран региона.

Трансграничный бассейн р. Сырдарья. От слияния двух крупных рек Нарына и Карадарья образуется река Сырдарья, в среднем течении в которой впадают река Чирчик и несколько небольших притоков (Ахангаран, Келес, Арысь). Длина Сырдарьи от места слияния рек Нарын и Карадарья до Аральского моря составляет 2337 км, а вместе с рекой Нарын - 2790 км, площадь бассейна — 150 100 км². Средний многолетний сток бассейна Сырдарьи равен 40,8 км³/год, в том числе до Чардаринского водохранилища (Казахстан) -38 км³/год.

Гидрографическая сеть разделяет бассейн реки Сырдарьи на три части [Никитин, 1977; Dukhovny, 2005]:

- зона формирования стока (суб-бассейн Нарына, Карадарьи, небольшие притоки и часть Чирчика) с минимальным водопотреблением; зона потенциальных гидроэнергоресурсов;
- долина Сырдарьи и часть Чирчика на пролювиальной и аллювиальной равнинах - основная часть наносов, орошаемых площадей и оазисов;
- низовье - побережье Аральского моря и дельты.

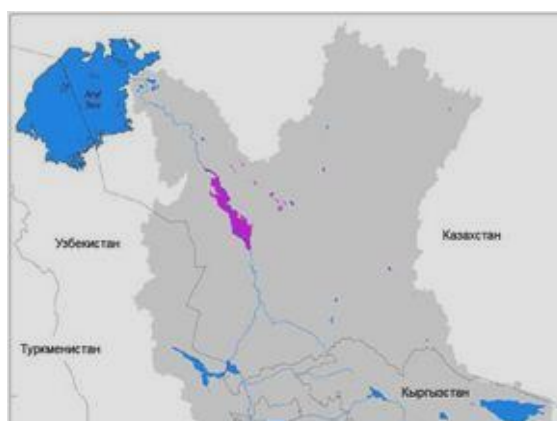


Рис. 4. Бассейн реки Амударья.

Рис.5. Бассейн реки Сырдарья.

Общий объем водных ресурсов - $37,2 \text{ км}^3$, включая $27,6 \text{ км}^3$ - трансграничные воды, из которых $21,1 \text{ км}^3$ используется и размещается Межгосударственной координационной водохозяйственной комиссии (МКВК).

Особенностью водных ресурсов реки Сырдарья является возвратный сток, достигающий в среднем в год 70% от забора в верхние водохранилища (сюда также включается боковой приток некоторых небольших рек). Регулирование стока в системе водного хозяйства Сырдарьи осуществляется 13 водохранилищами общей емкостью $35,0 \text{ км}^3$ и полезным объемом 27 км^3 . Основные среди них: Токтогульское водохранилище: общий объем $19,5 \text{ км}^3$, полезная емкость 14 км^3 (Кыргызстан); Андижанское водохранилище: общий объем $1,9 \text{ км}^3$, полезная емкость $1,75 \text{ км}^3$ (Узбекистан); Кайраккумское водохранилище: общий объем $4,03 \text{ км}^3$, полезная емкость $2,55 \text{ км}^3$ (Таджикистан); Чарвакское водохранилище: общий объем $2,05 \text{ км}^3$, полезная емкость $1,6 \text{ км}^3$ (Казахстан); Чардаринское водохранилище: общий объем $5,4 \text{ км}^3$, полезная емкость $4,4 \text{ км}^3$ (Казахстан).

Трансграничный бассейн р. Амударья. Самой крупной рекой в Центральной Азии является Амударья. Ее длина от истоков р. Пяндж составляет 2540 км, водосборная площадь равна 309 тыс.км² (без учета водосборной площади р. Зеравшан). Она образуется слиянием р. Вахш и р. Пяндж. В среднем течении в Амударью впадают три крупных правых притока (Кафирниган, Сурхандарья и Шерабад) и один левый (Кундуз). Далее вплоть до Аральского моря притоки отсутствуют. Основной сток р. Амударьи образуется на территории Таджикистана (около 72,8% - без учета р. Зерафшан). Далее река протекает по границе между Афганистаном и Узбекистаном, затем она пересекает Туркменистан и снова возвращается в Узбекистан, где впадает в Аральское море. Около 14,6% воды р. Амударьи формируется на афганской территории и в

Иране. Около 8,5% стока Амударьи формируется в Узбекистане и более 55% в Таджикистане [Шульц, 1965].

Крупномасштабное орошаемое земледелие в бассейне р. Амударьи, в основном, базируется на хорошо развитой системе ирригационных и дренажных сооружений, включая уникальные проекты, такие как Каршинская степь, где насосные станции общей мощностью 350 м³/с поднимают воду на высоту 180 м, Аму-Бухарский канал поднимает воду с расходом 200 м³/с на 130 м, а также несколько крупномасштабных гравитационных систем орошения с самым длинным в мире Каракумским каналом; его длина равна приблизительно 1000 км и средний ежегодный расход составляет около 700 м³/с. Каракумский канал отводит около 18 км³ воды в год из р. Амударьи в южную часть Туркменистана [Dukhovny, 2005]. Кстати, в период 60-90-х годов прошлого столетия забор воды из водных источников была резко увеличен на ирригационные нужды из-за крупномасштабного освоения новых орошаемых земель. Доминирующей отраслью в экономике государств региона по-прежнему остается сельское хозяйство. Сейчас в структуре водопотребления на орошаемое земледелие приходится более 90% суммарного водозабора. Высокий рост водопотребления был обусловлен высокими темпами прироста населения и развитием промышленности.

Анализ потенциала водно-энергетических ресурсов государств региона показывает, что, **во-первых**, эти ресурсы распределены по территории региона неравномерно. Так, общий сток бассейна Аральского моря формируется в пределах Кыргызстана - 25,1%, в Таджикистане - 43,4%, в Узбекистане - 9,6%, в Казахстане - 2,1%, в Туркменистане - 1,2%, в Афганистане и Иране - 18,6%. Потребление же водных ресурсов имеет обратную зависимость, например за последние 10 лет из общего объема водозаборов рек Сырдарьи и Амударьи на Кыргызстан приходилось не более 0,8%, Таджикистан - 13,05%, Казахстан - 16,07%, Туркменистан - 22,87% и Узбекистан - 39,3%. При этом коэффициент трансграничной зависимости водных ресурсов (доля речного стока, поступающего извне) для Казахстана составляет 42%, Узбекистана - 77%, а Туркменистана - 94%.

В-вторых, государства ЦАР обладают значительной диверсифицированной ресурсной базой энергетики, хотя и неравномерно распределенной по территории. По соотношению

уровней производства и потребления энергии регион относится к числу самодостаточных (1,72 по состоянию на 2000 г.). Однако этот показатель для Кыргызстана и Таджикистана составляет 0,58 и 0,35 соответственно, что свидетельствует о серьезных проблемах этих стран в обеспечении своей энергетической независимости.

Страны нижнего течения трансграничных рек Сырдарьи и Амударьи, обладают большим разведанным запасом угля, нефти и газа: так например, 89,5% - угля и 86,2% - нефти находится в Казахстане. Запасы газа распределены в более сглаженной пропорции между Туркменистаном (42,6%), Узбекистаном (29,8%) и Казахстаном (27,4%). Органическое топливо играет ведущую роль в структуре производства и потребления первичных топливно-энергетических ресурсов (ПТЭР), при этом доля природного газа составляет более половины общего объема потребляемых энергоресурсов, приблизительно 3/4 которого используется в Узбекистане. Уголь занимает второе место в структуре первичных энергоносителей, потребляемых государствами ЦАР, приблизительно 93% от объема использования которого приходится на Казахстан. Узбекистан использует 38% потребляемой в регионе нефти, 34% которой приходится на долю Казахстана.

Основной объем гидроэнергетического потенциала сосредоточен в Кыргызстане (12,8%) и Таджикистане (76,8%). Гидроэнергия является базовым источником в энергобалансе Кыргызстана и Таджикистана, ее доля в структуре производства ПТЭР составляет 77 и 96%, а в структуре их потребления - 43 и 40% соответственно. Степень использования экономически эффективной части гидропотенциала не превышает 10%, и доля гидроэнергии в структуре общерегионального топливно-энергетического баланса незначительна (около 3%).

Вследствие геополитических изменений и трансформации экономики в регионе нарушилась прежняя, достаточно устойчивая схема водопользования и функционирования энергетических систем и возникла реальная угроза национальной продовольственной и энергетической безопасности [Central Asia..., 2002].

Существуют определенные разногласия между государствами верхнего и нижнего течения трансграничных рек по отношению к освоению гидроэнергетических потенциалов в верховьях рек. Между тем, если не будут предприняты определенные межгосударственные договоренности, то завершение строительства

начатых еще в 80-е годы прошлого века крупных гидроэнергетических объектов (Камбаратинская ГЭС в Кыргызстане, Сангтудинская и Рогунская ГЭС в Таджикистане) может существенно изменить сложившийся ранее режим рек Сырдарьи и Амударьи. Все это создает определенные препятствия для привлечения инвестиций в освоение гидроэнергетического потенциала региона. Поэтому возникает необходимость достижения соглашения со всеми государствами бассейна трансграничной реки еще на прединвестиционной стадии о взаимоприемлемом режиме водопользования с учетом ожидаемого строительства и эксплуатации новых водно-энергетических объектов.

Все это требует создания эффективного механизма регулирования водопользования в регионе на основе международных прав с использованием математических теорий принятия решений в конфликтных ситуациях. Важнейшей задачей для экономики региона в целом является обеспечение интегрированного или комплексного подхода к использованию имеющегося водно-энергетического потенциала. Оптимальное его освоение с учетом интересов каждой страны региона может и должно быть достигнуто на основе межгосударственного сотрудничества, которое является залогом повышения продовольственной независимости, энергетической самодостаточности, расширения экспортного потенциала, экономии инвестиционных ресурсов.

Таким образом, проблема рационального использования и освоения водно-энергетических ресурсов бассейнов рек Сырдарья и Амударья была и остается наиболее острой региональной проблемой Центральной Азии. Принимая во внимание ее важность, главы государств-членов Организации "Центрально-Азиатское Сотрудничество" в 2003 г. обратились к Всемирному Банку с предложением проработать взаимоприемлемую модель сотрудничества и в октябре 2004 г. одобрили разработанную с его участием концепцию создания водно-энергетического консорциума.

Хотя создание водно-энергетического консорциума было инициировано Заявлением глав государств Казахстана, Кыргызстана и Узбекистана в г. Чолпон-Ате еще 24 июля 1997 г. и предусмотрено Соглашением между правительствами Республики Казахстан, Кыргызской Республики и Республики Узбекистан об использовании водно-энергетических ресурсов бассейна реки Сырдарьи от 17 марта 1998г. (Республика Таджикистан

присоединилась к Соглашению в 1999 году). Соглашение предусматривает обмен водно-энергетическими ресурсами, и практических результатов по данному вопросу до настоящего времени не достигнуто. Практика прошлых лет показывает, что эта схема реализуется недостаточно эффективно. Например, в бассейне трансграничной реки Сырдарья ирригационные требования Узбекистана в многоводные годы удовлетворяются за счет боковой приточности по малым рекам и Республика не стремится выполнять принятые обязательства по поставкам энергоресурсов зимой и получению летней электроэнергии из Кыргызстана. В свою очередь, Кыргызстан в маловодные годы, не будучи уверенным в выполнении обязательств партнерами по Соглашению по поставкам энергоресурсов, стремится создать запасы воды в Токтогульском водохранилище для выработки электроэнергии для собственных нужд в остродефицитный по энергоресурсам зимний период. Этим ограничиваются попуски воды для орошения земель летом в Узбекистане и Казахстане. Увеличение зимней выработки электроэнергии на ГЭС Кыргызстаном и соответственно выпуска воды из водохранилищ являются причинами зимних катастрофических расходов воды в низовье, создающих опасные чрезвычайные ситуации для населения Южно-Казахстанской и Кызылординской областей. Несогласованность и невыполнение договоренности о режиме работы ГЭС с водохранилищами Казахстана, Кыргызстана, Таджикистана и Узбекистана являются причиной возникновения зимних паводков, которые представляют угрозу для безопасности населения и требуют ежегодных огромных затрат для защиты городов и населенных пунктов от затопления.

Аналогичная ситуация может наступить в бассейне трансграничной Амударьи после строительства гидротехнических сооружений на рр. Вахш и Пяндж. Положение в бассейне Амударьи может еще более обостриться, если принять во внимание намерения Афганистана в ближайшее время выступить с требованиями по участию в водodelении по Пянджу. В результате этого сократится объем подачи воды для Туркменистана и Узбекистана, особенно в низовьях Амударьи.

Основными проблемами, по оценке ряда международных организаций и экспертов [Central Asia..., 2000; 2002], существующими между государствами ЦАР в области регулирования водных и энергетических отношений, являются:

- противоречия между интересами государств верхнего и нижнего течения рек;

- отсутствие межгосударственных структур в сфере совместного управления водно-энергетическими ресурсами, наделенных соответствующими полномочиями;
- рекомендательный характер принимаемых решений и отсутствие какой-либо ответственности за их исполнение на уровне созданных региональных структур управления;
- несогласованность действий на региональном и национальном уровнях между структурами управления водного хозяйства и энергетики;
- отсутствие арбитражной практики между конфликтующими сторонами с возможностями реального воздействия на решение спорных вопросов.

Для решения этих проблем необходимо учитывать реализацию следующих основных положений по данному вопросу:

- формирование согласованной региональной политики справедливого и разумного освоения и использования водно-энергетических ресурсов на основе норм международного права с участием всех государств региона;
- комплексное освоение гидроэнергетического потенциала и регулирования водных и энергетических ресурсов и обеспечения синхронности их решения;
- создание постоянно действующей межгосударственной структуры на основе преемственности по отношению к ранее созданным региональным структурам;
- выработка эффективных экономико-правовых механизмов сотрудничества, которые гарантируют выполнение принятых решений.
- разработка комплекса математических моделей принятия решений, позволяющих моделировать различные сценарии водопользования в бассейне трансграничных рек.

1.3. Математическое описание речного бассейна

Речной бассейн - территория земной поверхности, с которой все поверхностные и грунтовые воды стекают в данную реку, включая притоки реки [*Подольский и др., 1973*]. Поверхностный водосбор представляет собой участок земной поверхности, с которого поступают воды в данную речную систему или определённую реку. Подземный водосбор образуют толщи рыхлых отложений, из которых вода поступает в речную сеть. В общем случае поверхностный и подземный водосборы не совпадают.

Объект исследования. Объектом исследования в данной работе являются водные ресурсы речного бассейна, управление и регулирование которого в основном осуществляется посредством аккумулирующих емкостей (водохранилищ). Анализ ситуации и решения о распределении водных ресурсов имеют смысл, как правило, в рамках речного бассейна. Рациональное использование водных ресурсов способствует развитию основных секторов экономики: промышленности, сельского хозяйства и гидроэнергетики. Следовательно, каждая страна стремится обеспечить себя достаточным запасом водных ресурсов с тем, чтобы удовлетворить нужды своих водопотребителей и водопользователей.

Управление водными ресурсами зависит от территориальной принадлежности речного бассейна к тем или иным государствам. Если ресурсы принадлежат одному государству, то управление ими сводится к задаче оптимального их распределения между водопотребителями и водопользователями. Если же водные ресурсы принадлежат нескольким государствам, то управление ими сводится к рациональному водораспределению между государствами с учетом потребностей экономики каждого из них.

Моделирование речного бассейна. В задачах планирования водных ресурсов бассейн реки рассматривается в качестве основной зоны планирования. Система бассейна реки WB состоит из трех компонентов:

$$WB = \{ S, D, P \}, \quad (1.1)$$

где S - компоненты источников такие, как колена реки, каналы, водохранилища и водоносные слои; D - компоненты спроса такие, как орошаемые поля, промышленные предприятия и города; P - промежуточные компоненты такие, как обогащающие заводы, предприятия по повторному использованию и переработке воды.

Устойчивое управление водными ресурсами требует наличия интегрированной системы бассейна, отражающей целостность реального мира. На уровне бассейна важнейшие гидрологические, агрономические и экономические связи могут быть объединены во всеобъемлющую модель, и, в результате, политические инструменты, разработанные для обеспечения более рационального и экономического использования водных ресурсов, в основном применяются на этом уровне. Основа для моделирования управления бассейном реки представлена на рис. 6. Вода может быть использована в пределах русла, включая выработку

гидроэлектроэнергии, отдых, утилизация отходов, а также вне русла в целях сельскохозяйственного, коммунального и промышленного использования. Социально-экономическая выгода для зоны речной сети является важным компонентом стратегии управления водными ресурсами бассейна. В неё входят позитивный вклад экономической стоимости коммунального и промышленного использования воды, доход от использования воды для орошения, выгода от использования воды в пределах русла, а также ущерб окружающей среде, связанный с такими действиями, как сброс коммунальных и промышленных отходов, а также ирригационный дренаж. Высший уровень регулирования системы предполагает неукоснительность исполнения организационных директив таких, как права на воду, цены на воду, цены на сельхозпродукцию, налоги на загрязнение. Организационные директивы и экономические стимулы сдерживают или стимулируют работу гидрологической системы и соответствующих решений в пределах коммунальной, промышленной и сельскохозяйственной зон планирования. Различные виды использования воды должны распределяться на конкурентной основе между отдельными водопользователями согласно предписанным организационным правилам и в соответствии с экономическими стимулами.

Любая реальная речная система, представленная своими природными и антропогенными компонентами, имеет сложную структуру, описать которую можно лишь приближенно, до некоторого уровня детализации. В настоящей работе рассматривается бассейн реки, в котором преобладает использование воды в сельскохозяйственных и энергетических целях.

Таким образом, речной бассейн характеризуется в основном двумя компонентами: *источником и спросом*. Так как мы не учитываем подземные воды, качество воды, русловые процессы и время добегания воды, а также связанные с этим задачи, то в упрощенной постановке источники речного бассейна можно описать как

$$S = \{N, Cn, R\}, \quad (1.2)$$

где N – совокупность колен рек (участок между водохранилищами, боковые притоки); Cn – совокупность каналов (по которым вода забирается из речного бассейна или же обратно сбрасывается в

речной бассейн после повторного использования); R – совокупность водохранилищ, расположенных в речном бассейне (схема расположения - произвольное).

Спросы к речному бассейну характеризуются в основном со стороны водопотребителей и водопользователей. Основным водопотребителем является орошаемое земледелье. Основным водопользователем речного бассейна является гидроэнергетика. Тем самым, спросы к речному бассейну описываются, как

$$D = \{ Q, E \}, \quad (1.3)$$

где Q – совокупность требований орошаемого земледельца (в целом для речного бассейна), E – совокупность требований на производство гидроэлектроэнергии.

Задача регулирования речного бассейна заключается в удовлетворении предъявляемых спросов с максимальной степенью обеспеченности.

Для описания математического портрета речного бассейна зададим на речной сети достаточное количество точек, которые могут быть створами гидроузлов, местами водозабора или сброса сточных вод или, наконец, створами, в которых в принципе можно контролировать водохозяйственный баланс. Пронумеруем эти точки ($k = 1, 2, \dots, l$). Совокупность точек $\tilde{l}$ и соединяющих их участков речной сети образует ориентированный граф, ориентация ветвей которого определяется направлением течения (рис.7). В узлах (вершинах) графа как бы сосредоточены элементарные водосборы - части территории речного бассейна, заключенные между смежными (верхними и нижними) выделенными створами речной сети. При этом будем считать, что каждый элементарный водосбор сосредоточивается в нижерасположенном створе (узле). Каждому узлу k всегда может быть однозначно поставлена в соответствие совокупность узлов $\tilde{l}_k^+$, которые расположены выше него, и совокупность узлов $\tilde{l}_k^-$, расположенных ниже (в обоих случаях – включая сам k -й узел).

Основные компоненты: S - источники водных ресурсов и D - спрос на водные ресурсы речного бассейна при выделении элементарных бассейнов оказываются строго распределенными между ними (см. рис. 7.) Примем следующее допущение: водохранилищам в графе отвечают узлы.

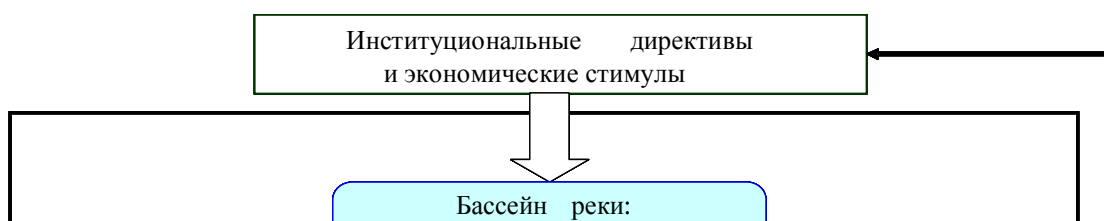


Рис. 6. Структура моделирования для управления речным бассейном.

Будем концентрировать в узлах k , ресурс-сток $v_k (v_k \in S)$, потребление – забор воды $p_k (p_k \in D)$ и возврат использованных вод $r_k (r_k \in S)$ соответствующего k -го элементарного бассейна, пренебрегая распределением этих величин по его территории и объектам. Указанные величины контролируются средними расходами ($\text{м}^3/\text{сек}$) в единый для всех створов наиболее напряженный месяц расчетного маловодного года.

Для речных бассейнов, расположенных в одной природно-климатической зоне, вполне приемлемо допущение о достаточной синхронности колебаний речного стока [Водохозяйственные расчеты ..., 1969].

Будем называть располагаемыми водными ресурсами речной водной системы (при данном составе водохранилищ и других водных объектов) в данном створе величину максимального годового объема речного стока, который может быть представлен данной совокупностью существующих и планируемых водопользователей по их режиму с принятой расчетной обеспеченностью [Подольский и др., 1973, Великанов и др., 1983, Воронаев и др., 1989, 2003].

Обозначим располагаемые ресурсы элементарных бассейнов через V_k , а суммарные ресурсы речной сети в замыкающем створе (узле)

k , включающие в себя ресурсы не только k -го, но и всех вышерасположенных (по течению) узлов через V_k . Располагаемый ресурс, отвечающий минимальному среднемесячному расходу в расчетном маловодном году, будем называть естественным ресурсом и обозначать той же буквой V_k^e для элементарного водосбора и V_k^e суммарный в k -м узле. Учет синхронности стока позволяет считать, что

$$V_k^e = \sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} v_{k^*}^e,$$

где сумма берется по всей совокупности вышерасположенных узлов $k^* \in \tilde{l}_k^+$.

Ресурс воды v_k в каждом элементарном бассейне может быть увеличен сверх естественного v_k^e за счет регулирования стока. Последнее может осуществляться водохранилищем, расположенным как в k -м, так и в любом другом узле, лежащем ниже по течению.

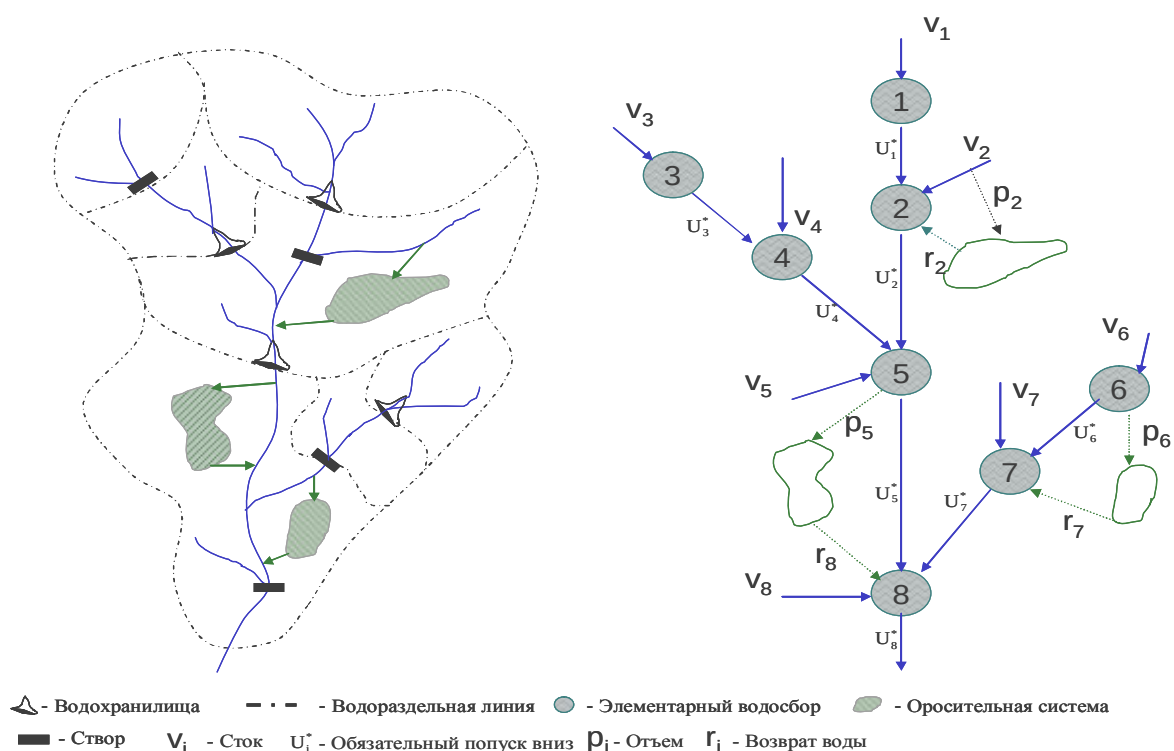


Рис.7. Представление системы речного бассейна в виде ориентированного графа.

Для каждой элементарной части речного водосбора, расположенной между створами смежных водохранилищ,

устанавливаются зависимости расчетной отдачи стоковых рядов соответствующих частных водосборов V_k от “емкости регулирования” x_k , т.е. $v_k = v_k(x_k)$, которая в последующем может быть размещена как в данном k -м, так и в любом другом нижерасположенном водохранилище – в зависимости от их экономики и требований баланса. Типовые гидрографы для сезонного и номограммы для многолетнего регулирования могут быть использованы при построении этих характеристик [Гуглий, 1959; Крицкий и др., 1952.].

Располагаемый ресурс в данном k -м створе (узле) будет равен сумме располагаемых ресурсов элементарных водосборов, расположенных в верхней части бассейна:

$$V_k = \sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} v_{k^*} \quad (1.4)$$

При наличии нескольких гидроузлов, расположенных каскадно, отдача реки в створе каждого из них V_k будет зависеть от объемов всех вышерасположенных водохранилищ каскада, т.е. $V_k = V_k(X_{k^*})$, $k^* \in \tilde{l}_k^+$, где X_{k^*} - объем водохранилища в k^* узле.

Зависимость располагаемого ресурса V_k в k -м узле от объема водохранилищ каскада, расположенных в вышележащей части речной сети, может быть сформирована следующим искусственным приемом, прибегнуть к которому можно благодаря принятому допущению о достаточной синхронности тактов сработки и наполнения всех водохранилищ. В каждом k -м водохранилище выделяется столько составляющих $x_k^{k^*}$ его емкости X_k , сколько элементарных бассейнов (узлов) находится выше него ($\tilde{l}_k^+$). При этом нижним индексом k при X будем обозначать номер водохранилища (узла), в котором производится регулирование, а верхним индексом k^* - номер узла, сток которого регулируется данной составляющей емкостью k -го водохранилища $x_k^{k^*}$. Очевидно, что сумма всех составляющих равна объему водохранилища:

$$X_k = \sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} x_k^{k^*} \quad (1.5)$$

Сток каждого k^* -го водосбора может регулироваться как в k^* -м, так и во всех нижерасположенных водохранилищах. Введение таких составляющих емкостей водохранилищ каскада позволяет записать зависимость располагаемого ресурса в произвольном k -м узле от суммарной емкости водохранилищ каскада следующим образом:

$$V_k = \sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} v_{k^*} \left(\sum_{k^{**} \in \tilde{l}_{k^*}^+} x_{k^{**}}^{k^*} \right). \quad (1.6)$$

Здесь k - узел, для которого формируется балансовое равенство; $k^* \in \tilde{l}_k^+$ - поочередно рассматриваемые вышерасположенные узлы, сток которых регулируется нижерасположенными водохранилищами; k^{**} - водохранилища, расположенные на $k^* - k$ -м участке речной сети ($\tilde{l}_{k^*}^+$) и регулирующие сток k^* -го водосбора.

Таким образом, $x_{k^{**}}^{k^*}$ есть k^* -я составляющая емкости k^{**} -го водохранилища, а сумма по $k^* \in \tilde{l}_k^+$ есть сумма соответствующих составляющих емкостей водохранилищ, расположенных на пути из узла k^* в узел k и регулирующих сток k^* -го водосбора. Такая процедура позволяет учесть так называемое каскадное регулирование речного стока.

Очевидно, что располагаемый ресурс будет определяться распределением емкостей водохранилищ каскада между составляющими. Суммарная емкость регулирования стока каждого водосбора во всех водохранилищах ниже расположенной части каскада имеет предел a^{k^*} :

$$0 \leq \sum_{k^{**} \in \tilde{l}_{k^*}^+} x_{k^{**}}^{k^*} \leq a^{k^*}, \quad (1.7)$$

который определяется емкостью для предельно возможной степени регулирования, когда располагаемый ресурс речной водной системы становится равным среднегодовому расходу (за вычетом потерь).

С другой стороны, объем воды каждого водохранилища x_k также может изменяться лишь в определенном диапазоне:

$$X_k^{\min} \leq \sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} x_k^{k^*} \leq X_k^{\max} . \quad (1.8)$$

Таким образом, любой бассейн можно представить в виде ориентированного дерева, узлами которого являются частные водосборы, а ориентированными дугами – соответствующие участки речной сети. Каждый узел характеризуется параметрами p_k, r_k, v_k^e и зависимостью $v_k(x_k)$. Формирование для каждого элементарного бассейна зависимости $v_k(x_k)$ и их суммирование в последующем по существу означает, что интегральный (суммарный) сток в каждом створе имеет столько составляющих, сколько частных водосборов находится выше него.

Каждая дуга дерева характеризуется минимальным попуском в нижерасположенный узел $V_k^{\min}$. Последний представляет собой попуск – «нерушимый расход», который специальными расчетами признано необходимым сохранить на данном участке реки по экологическим, санитарно-гигиеническим или рекреационным условиям.

Речная водная система за счет регулирования стока и водопользователи путем рационального использования воды, совместно должны поддерживать во всех узлах бассейна водохозяйственный баланс:

$$V_k - P_k + R_k \geq V_k^{\min} , \quad (1.9)$$

где V_k, P_k и R_k – суммарные величины соответственно зарегулированного стока (располагаемых ресурсов), отъемов и возврата воды в верхней части бассейна, замыкаемой k -м узлом. Неравенство (1.9) отражает баланс по количеству водных ресурсов и с учетом выражений (1.6) может быть записано так:

$$\sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} v_{k^*} \left(\sum_{k^{**} \in \tilde{l}_{k^*}^+} x_{k^{**}}^{k^*} \right) \geq P_k - R_k + V_k^{\min} . \quad (1.10)$$

Таким образом, система неравенств (1.4)-(1.10) полностью описывает математический портрет речного бассейна, где водохозяйственные объекты строго распределены между элементарными бассейнами, водный баланс которых однозначно определяется выражением (1.10).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда водосборный бассейн с речной сетью покрывается территориями нескольких государств, т.е. речной бассейн приобретает характер трансграничного. Понятие трансграничности в природе как таковое не существует, оно как ограничение (территориальная сеть) накладывается на рассматриваемый бассейн. Природа, между тем, оперирует конкретными объектами. Что касается водных ресурсов речных бассейнов, то реальная картина здесь это - наличие водных ресурсов самой реки и ее использование по всему руслу течения реки, а также зависимость внутригодового распределения воды от водности года.

Предположим, что каждая страна n ($n \geq 2$) располагает ресурсами элементарных бассейнов $v_k^n \in S$ и определенным спросом на забор воды $p_k^n \in D$, при этом накладываемая на бассейн территориальная сеть разделяет бассейн на две зоны: I^{up} - формирования и I^{down} - потребления водных ресурсов. При этом $I^{up} \cup I^{down} \in \tilde{l}_k^+ \cup \tilde{l}_k^-$, то есть объединение этих зон, полностью покрывается совокупностями узлов $\tilde{l}_k^+$, которые расположены выше узла k , и совокупностями узлов $\tilde{l}_k^-$, расположенных ниже узла k , включая сам k -й узел. Если k -й узел расположен на границе указанных зон, то $\tilde{l}_k^+ = I^{up}$ и $\tilde{l}_k^- = I^{down}$; иначе определяется узел k° на границе зон и предполагается, что $k = k^\circ$. В обоих случаях процедура, описанная выше, позволяет осуществлять регулирование стока путем поддержания водохозяйственного баланса во всех узлах речной сети с тем, чтобы сбалансировать распределение воды между элементарными бассейнами, исходя из располагаемых ресурсов и спроса на них.

В зависимости от спроса к бассейну определяются различные взаимоотношения государств, расположенных в этом бассейне. Если требование орошаемого земледельца одинаково приоритетно как для стран зоны формирования, так и для стран зоны потребления, то задача регулирования водных ресурсов трансграничного бассейна сводится к достижению максимального удовлетворения потребности орошаемого земледельца в определенный период. Иначе, когда требование стран зоны формирования приоритетно на производство гидроэлектроэнергии,

а требование стран зоны потребления - на орошение, тогда задача распределения водных ресурсов трансграничного бассейна заключается в нахождении компромиссных решений между требованиями этих государств. О решении подобных задач достаточно подробно речь будет идти во второй главе монографии.

Таким образом, рассмотрев и формализовав элементы системы и их взаимосвязи, мы имеем все необходимое для математической постановки задачи.

Математическая формулировка задачи. Задача оптимального регулирования и использования водных ресурсов речного бассейна формулируется следующим образом. Требуется найти емкости водохранилищ X (компонентами вектора X являются емкости водохранилищ в узлах) и план распределения водных ресурсов между возможными водопользователями P (компонентами вектора P являются величины отъемов на узлах, однозначно определяющих и возвраты воды) на территории рассматриваемого речного бассейна, которые обеспечат достижение максимума суммарного условного чистого дохода:

$$\max\{G(P) - [F(X) + F(P)]\} \quad (1.11)$$

при соблюдении всех технологических связей и ограничений. Здесь $G(P)$ представляет собой оценку эффекта от производства всех видов продукции во всех узлах речной водной системы, взвешенную по заданным узловым замыкающим оценкам; $[F(X) + F(P)]$ – все виды затрат по водохранилищам и предприятиям-водопользователям. Выполнение условия максимума (1.11) обеспечивает выбор тех стратегий использования водных ресурсов и тех водохранилищ, которые поддерживают водохозяйственный баланс в речном бассейне при осуществлении выбранного сценария с получением наибольшего эффекта в национальной экономике государств.

Каждый водопользователь или группа водопользователей, выпускающих однородную продукцию, d_{kji} – объем i -й выпущенной продукции в k -м узле отъема и j -м узле возврата воды, характеризуется отъемом P_{kji} – забор воды в k -м узле отъема и j -м узле возврата воды для выпуска i -й продукции.

При наличии соответствующих экономических оценок водохозяйственных объектов и потребляемых ресурсов все это позволяет определить зависимость производственных затрат от

объема выпускаемой продукции $F(d_{kji})$. Зная для каждого производства зависимость $p(d)$ [Укрупненные нормы ..., 1973], производственные затраты можно представить в виде функции от объема забираемой воды:

$$F_{kji} = F_{kji}(p_{kji}). \quad (1.12)$$

С учетом ранее описанных технологических связей подробная запись функционала (1.11) и ограничений имеет следующий вид:

найти

$$\max_{p_{kji}, x_k^*} \left\{ \sum_{k,i} b_{ki} d_{kji}(p_{kji}) - \left[\sum_k F_k \left(\sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} x_k^{k^*} \right) + \sum_{k,i} F_{kji}(p_{kji}) \right] \right\}, \quad (1.13)$$

где b_{ki} - заданные узловые замыкающие оценки продукции, выпускаемой водопользователями, при ограничениях, обеспечивающих водохозяйственный баланс

$$\sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} v_{k^*} \left(\sum_{k^{**} \in \tilde{l}_{k^*}^+} x_k^{k^{**}} \right) \geq \sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} p_{k^*} - \sum_{k^* \in \tilde{l}_k^+} r_{k^*} + V_k^{\min} \quad (1.14)$$

и ограничений на изменение переменных p и x в диапазонах (1.7) и (1.8). Здесь $k, j \in \tilde{I}$, $i \in \tilde{I}$.

Рассматриваемая задача относится классу задач нелинейного программирования, где максимизируемый функционал (1.13) вогнутый, а область определения переменных X и P , заданная системой ограничений, выпуклая. Это позволяет создать алгоритм решения задачи, основанной на методах оптимального управления [Алексеев и др., 1979; Субботин и др., 1981].

Предложенная методология моделирования облегчит процесс выработки стратегии регулирования и использования водных ресурсов как на локальных (национальных), так и на трансграничных речных бассейнах.

В последующих главах настоящей монографии представлен ряд конкретных математических моделей (аналитических, оптимизационных и имитационных) управления водными ресурсами трансграничных речных бассейнов, которые позволяют генерировать и сравнивать многочисленные варианты развития и функционирования системы.

1.4. Существо проблемы водodelения на примере модельного речного бассейна

Рассматривается модельный речной бассейн в рамках водохозяйственного года. Он представляется в виде системы из двух государств – водопользователей *A* и *B*, из которых *A* расположен в зоне формирования стока и *B* - в зоне потребления водных ресурсов. Сток может регулироваться водопользователем *A* с помощью расположенного на его территории водохранилища с ГЭС.

Предполагается, что *A*- пользователь заинтересован в реализации такого режима управления водохранилищем, который обеспечивает его потребности в выработке электроэнергии. Предполагается также, что интересы *B* - пользователя заключаются в обеспечении его потребностей в ирригации.

В соответствии с международной конвенцией, за государством *A* признается право собственности на водные ресурсы трансграничной реки, одновременно следует учитывать интересы государства *B* зоны потребления [Конвенция ЕЭК ООН по охране..., 1992].

В связи с этим рассматриваются два сценария, когда управление ресурсами водохранилища осуществляется:

- исключительно в интересах *A*- государства, и тогда режим поступления водных ресурсов для *B*- пользователя становится случайным процессом, который наверняка не соответствует его потребностям (*сценарий 1*);

- исключительно в интересах *B*- государства за счет того, что государство *A* учитывает в полном объеме его ирригационные требования (*сценарий 2*).

Ни один из этих сценариев не может удовлетворить обоих участников водodelения. Но тогда, вполне естественно, предпринять попытку разработать такое управление режимом работы водохранилища, которое было бы сфокусировано на удовлетворение, по возможности, требований страны *A* в электроэнергии и *B* - в ирригации (*сценарий 3*).

Приступая к рассмотрению каждого сценария в отдельности, приведем модельные показатели, характеризующие режим работы водохранилища и ГЭС, а также ирригационные требования *B* - пользователя:

x^0 - объем воды в водохранилище к началу водохозяйственного года;

x^1 - объем воды в водохранилище в конце водохозяйственного года;

$v^{0,1}$ - объем приточности за период водохозяйственного года (предполагается известной детерминированной величиной);

$\tilde{u}$ - объем попуска воды через плотину в вегетационном периоде (V - период);

$\hat{u}$ - объем попуска воды через плотину вне вегетационного периода;

$\check{e}$ - количество выработанной электроэнергии в V - периоде;

$\hat{e}$ - количество выработанной электроэнергии вне V - периода;

Очевидно, $\check{e} = \check{e}(\tilde{u})$ и $\hat{e} = \hat{e}(\hat{u})$ зависят от объемов попуска.

Предполагается, что эти количества выражаются в денежных единицах, причем не в прямой цене, а через опосредствованную цену на электроэнергию.

$\check{h}$ - валовая сельскохозяйственная продукция B - государства за V - период (в денежных единицах);

$\hat{h}$ - валовая сельскохозяйственная продукция B - государства вне V - периода (в денежных единицах).

Предполагается, что $\check{h} = \check{h}(\tilde{u})$ и $\hat{h} = \hat{h}(\hat{u})$, т.е. объемы валовой продукции, зависят от объемов утилизированной воды.

Сценарий 1 (в интересах A - пользователя). В качестве критерия удовлетворения потребности в электроэнергии принимается суммарное количество выработанной электроэнергии за водохозяйственный год, т.е.

$$I^A = \check{e}(\tilde{u}) + \hat{e}(\hat{u}). \quad (1.15)$$

Наибольшую выгоду A - пользователь получит в том случае, если управление ресурсами водохранилища, т.е. значения $\tilde{u}$ и $\hat{u}$, будет подчинено условию максимизации величины (1.15) при выполнении ограничений:

$$x^1 = x^0 + v^{0,1} - (\tilde{u} + \hat{u}), \quad (1.16)$$

$$\tilde{u} + \hat{u} \leq v^{0,1}, \quad (1.17)$$

$$\tilde{u} \geq 0, \quad \hat{u} \geq 0, \quad (1.18)$$

Ограничение (1.16) означает баланс воды водохранилища за водохозяйственный год. Ограничение (1.17) показывает, что

фактический попуск за водохозяйственный год не превосходит объема приточности за тот же период времени. Ограничение (1.18) – вполне естественно.

Решение задачи (1.15) - (1.18) приводит к определению оптимальных значений $\tilde{u} = \tilde{u}_*$ и $\hat{u} = \hat{u}_*$. Подставляя их в (1.15) и (1.16), получим соответственно $I_{\max}^A = \tilde{e}(\tilde{u}_*) + \hat{e}(\hat{u}_*)$ - максимальную выгоду от выработки электроэнергии и величину x^1 , т.е. начальный объем воды в водохранилище на начало следующего водохозяйственного года.

Теперь оценим, какие последствия сценария 1 ожидаются для экономики государства B . Для полученных значений $\tilde{u}_*$ и $\hat{u}_*$ валовая продукция страны B за весь водохозяйственный год составит величину

$$H(\tilde{u}_*, \hat{u}_*) = \tilde{h}(\tilde{u}_*) + \hat{h}(\hat{u}_*). \quad (1.19)$$

В результате управления водохранилищем по первому сценарию суммарный доход стран A и B будет равен:

$$\Sigma_1 = I_A^{\max}(\tilde{u}_*, \hat{u}_*) + H(\tilde{u}_*, \hat{u}_*), \quad (1.20)$$

где первое слагаемое определяется формулой (1.15) и второе слагаемое - формулой (1.19).

Сценарий 2 (в интересах B - пользователя). В качестве критерия удовлетворения ирригационных требований страны B в полном объеме принимается суммарный объем валовой продукции за весь водохозяйственный год:

$$H^B = \tilde{h}(\tilde{u}) + \hat{h}(\hat{u}). \quad (1.21)$$

B - пользователь получит наибольшую выгоду, если режим управления ресурсом водохранилища будет сконцентрирован на максимизации величины (1.21) при выполнении ограничений (1.16) - (1.18).

В результате решения этой задачи определяются оптимальные значения $\tilde{u} = \tilde{u}_{**}$ и $\hat{u} = \hat{u}_{**}$. Подставляя их в формулы (1.21) и (1.16), получим, соответственно $H_{\max}^B = \tilde{h}(\tilde{u}_{**}) + \hat{h}(\hat{u}_{**})$ - максимальную выгоду от реализации валовой продукции и величину x^1 , т.е. начальный объем воды в водохранилище на следующий водохозяйственный год.

Оценим последствия сценария 2 для национальной экономики страны A . Выработка электроэнергии страной A за весь период водо-

хозяйственного года для найденных значений $\tilde{u}_{**}$ и $\hat{u}_{**}$ составит величину

$$I_A = \tilde{e}(\tilde{u}_{**}) + \hat{e}(\hat{u}_{**}). \quad (1.22)$$

Таким образом, в результате управления водохранилищем по второму сценарию суммарный доход стран А и В составит величину

$$\Sigma_{II} = H_B^{\max}(\tilde{u}_{**}, \hat{u}_{**}) + I_A(\tilde{u}_{**}, \hat{u}_{**}),$$

где первое слагаемое определяется формулой (1.21), а второе - (1.22).

Сценарий 3 (согласование интересов А и В). В качестве критерия удовлетворения, по возможности, требований страны А в электро-энергии и страны В в ирригации принимается линейная свертка вида

$$\mathfrak{Z} = \alpha_1 \cdot I_A(\tilde{u}, \hat{u}) + \alpha_2 \cdot H_B(\tilde{u}, \hat{u}) \quad (1.23)$$

за весь период водохозяйственного года. Здесь $\alpha \in [0,1]$ отражает приоритетность критериев $I_A(\tilde{u}, \hat{u})$ и $H_B(\tilde{u}, \hat{u})$. При $\alpha = 1$ сценарий 3 превращается в сценарий 1 с приоритетом в выработке электроэнергии, а при $\alpha = 0$ - в сценарий 2 с приоритетом в ирригации.

Наибольшую выгоду А и В- пользователи получают в том случае, когда управление ресурсами водохранилища, то есть значения $\tilde{u}$ и $\hat{u}$, будет подчинено условию максимизации величины (1.23) при выполнении ограничений (1.16) - (1.18).

Решение этой задачи приводит к определению оптимальных значений $\tilde{u} = \tilde{u}_o$ и $\hat{u} = \hat{u}_o$, которые доставляют максимальное значение критерию $\mathfrak{Z}_{\max} = \alpha_1 \cdot I_A(\tilde{u}_o, \hat{u}_o) + \alpha_2 \cdot H_B(\tilde{u}_o, \hat{u}_o)$. Из соотношения (1.16) найдется величина X^1 , которая определит начальный объем воды в водохранилище на следующий период. И одновременно с этим получаем

$$\begin{cases} I_A(\tilde{u}_o, \hat{u}_o) = \tilde{e}(\tilde{u}_o) + \hat{e}(\hat{u}_o), \\ H_B(\tilde{u}_o, \hat{u}_o) = \tilde{h}(\tilde{u}_o) + \hat{h}(\hat{u}_o). \end{cases} \quad (1.24)$$

Итак, в результате управления водохранилищем по третьему сценарию суммарный доход стран А и В будет равен

$$\Sigma_{III} = I_A(\tilde{u}_o, \hat{u}_o) + H_B(\tilde{u}_o, \hat{u}_o), \quad (1.25)$$

где слагаемые определяются формулой (1.24).

Анализ полученных сценариев. Во всех сценариях оптимальные решения: $\tilde{u}_*, \hat{u}_*$ - в 1-м, $\tilde{u}_{**}, \hat{u}_{**}$ - во 2-м и $\tilde{u}_o, \hat{u}_o$ - в

3-м, а также суммарные доходы $\sum_I$, $\sum_{II}$ и $\sum_{III}$ пользователей A и B зависят от конкретных значений некоторого количества n параметров, в частности от первоначального объема воды в водохранилище X_0 , объема приточности $v^{0,1}$, а также от набора показателей, характеризующих производственные функции выработки электроэнергии и получения валовой продукции от ирригации.

Для определения взаимоотношений суммарных доходов в различных сценариях введем три решающие функции:

$$D_{12} = \sum_I - \sum_{II} ,$$

$$D_{13} = \sum_I - \sum_{III} ,$$

$$D_{23} = \sum_{II} - \sum_{III} .$$

Условие $D_{ij} = 0$ ($i < j$) определяет гиперповерхность в пространстве P всевозможных допустимых значений параметров. Эта поверхность, вообще говоря, разделяет P на два подпространства - P_{ij}^+ и P_{ij}^- , $i, j = 1, 2, 3$ и $i < j$. В подпространстве P_{ij}^+ имеем а в P_{ij}^- - наоборот.

$$\sum_i > \sum_j , \quad (1.26)$$

Физический смысл (1.26) для рассматриваемой модельной задачи заключается в том, что суммарный доход пользователей A и B для первого сценария (при $i=1$) больше, чем суммарный доход пользователей A и B для второго сценария (при $j=2$) в положительном подпространстве.

Неравенство (1.26) указывает на более высокую суммарную доходность обоих участников в i -м сценарии водodelения в сравнение с j -м сценарием. Однако из этого вовсе не следует, что надо реализовать именно i -й сценарий водodelения. Дело в том, что в этом случае наверняка один из участников окажется ущемленным. Потребуется разработать системный подход к балансированию интересов водопользователей на основе норм международного права.

1.5. Математические модели принятия компромиссных решений при управлении водными ресурсами

Модель принятия компромиссных решений при управлении водными ресурсами

В работе [Ерешко и др., 2008] описана проблема водodelения в условиях трансграничных бассейнов, проводится системный анализ проблемы, предложены модели и принципиальные обоснования кооперации стран-пользователей водных ресурсов трансграничных рек. Формальное обоснование целесообразности кооперации стран - водопотребителей в случае описания действий стран в одношаговом варианте представлено в работе [Наврузов, 2008]. В работе [Ерешко и др., 2008] содержится формальное обоснование целесообразности кооперации стран - водопотребителей. Здесь мы приводим полное описание обоснования принятия коалиционных решений группой стран, располагающихся в бассейне трансграничных рек.

Статическая модель отдельной страны. Рассмотрим процесс управления расходом водных ресурсов в отдельно взятой стране в пределах одного года. Будем предполагать, что в рассматриваемой стране имеется одна электростанция и при ней водохранилище, позволяющее создавать запасы воды. Пусть A_u – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная выше водохранилища по течению, а A_d – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная ниже водохранилища. Обе эти величины являются управлениями оперирующей страны.

Обозначим w_u – объем воды, приходящей на территорию данной страны через государственную границу, w_o – объем осадков, выпадающих непосредственно на территории данной страны. Обе эти величины будем считать случайными с известными распределениями вероятностей. Распределение величины w_o определяется природными факторами; для получения распределения величины w_u нужно знать принципы поведения сопредельной страны (можно, например, предполагать, что оно описывается моделью, аналогичной данной).

Пусть w_b – сброс воды через плотину водохранилища до периода полива, w_w – сброс воды через плотину водохранилища в период полива, w_a – сброс воды через плотину водохранилища после периода полива. Эти три величины считаем также управлениями оперирующей стороны.

Аналогично e_b – производство электроэнергии на электростанции до периода полива, e_w – производство электроэнергии на электростанции в период полива, e_a – производство электроэнергии на электростанции после периода

полива. Будем считать, что производство электроэнергии определяется производственными функциями $e_b = \varphi(w_b)$, $e_w = \psi(w_w)$, $e_a = \varphi(w_a)$. Разница в производственных функциях обусловлена тем, что в период полива на режим сброса воды могут накладываться дополнительные ограничения, отражающие запросы сельского хозяйства. Мы будем предполагать, что в каждый из этих периодов режимы работы электростанции выбираются оптимальным образом. Функции φ и ψ монотонно возрастают. Кроме того, будем считать, что здесь уже учтены ограничения по мощности электростанции, предполагая, что значения производственных функций не меняются, начиная с некоторой величины. Пусть p_e – денежные затраты на производство единицы электроэнергии.

Обозначим c_u – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся выше по течению от водохранилища, а c_d – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся ниже по течению от водохранилища. Эти величины тоже являются управлениями. Примем ограничения на выбор управлений в форме вероятностных ограничений, что обеспечивает уровень гарантированной отдачи водного объекта: $\text{Вер}(c_u \leq w_u + w_0, c_d \leq w_w) \geq b$, где уровень b характеризует гарантию, на которую рассчитывает управляющий орган страны. Пусть C_u – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной на площадях, расположенных выше водохранилища, а C_d – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной на площадях, расположенных ниже водохранилища. Будем считать, что объемы производства определяются производственными функциями $C_u = \Phi(A_u, c_u)$ и $C_d = \Psi(A_d, c_d)$. Разница производственных функций может определяться различиями природных условий. Принимаем, что при фиксированных A_u и A_d функции Φ и Ψ монотонно возрастают и вогнуты по c_u и c_d соответственно. Пусть p_c – денежные затраты на производство единицы сельхозпродукции.

Предположим, что за получаемую воду w_u страна платит сумму m_u , а за воду $w_d = w_b + w_w + w_a - c_d$ получает сумму m_d . Суммы m_u и m_d считаем в этой модели заданными параметрами (мы не исключаем случая, когда они равны нулю, что соответствует некооперативному управлению).

Пусть W_b – запас воды в водохранилище на начало года, W_a – запас воды в водохранилище на конец года. Предполагаем, что выполняется балансовое соотношение

$$W_a = W_b + w_u + w_o - c_u - w_b - w_w - w_a.$$

Будем считать, что качество управления системой оценивается по следующим вспомогательным критериям: производством сельхозпродукции $C = C_u + C_d$; объемами производства электроэнергии e_b , e_w и e_a ; вероятностью чрезвычайного положения в результате засухи в будущем, которая монотонно зависит от запаса воды W_a ; финансовыми затратами $f = p_e(e_b + e_w + e_a) + p_c C$; сальдо расчетов за воду $m_d - m_u$.

Предположим, что оперирующая сторона пользуется сверткой критериев $g(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, m_d - m_u)$ [Гермейер, 1971]. Естественно предполагать, что функция g убывает по аргументу f и возрастает по остальным аргументам.

Замечание. В рассматриваемой ситуации могут быть еще следующие ограничения. Ограничение по продовольственной безопасности $C \geq C^*$. Ограничения по энергетической безопасности $e_b \geq e_b^*$, $e_w \geq e_w^*$, $e_a \geq e_a^*$ (именно поэтому величины e_b , e_w , e_a входят в свертку по отдельности, а не в сумме, так как мы считаем, что электроэнергию нельзя запасать). Ограничение по объему водохранилища $w_a \leq w^*$. Ограничение по финансам $f \leq f^*$. Ограничение, обеспечивающее экологическую и/или политическую стабильность вида $w_d \geq \pi$. Эти ограничения носят «мягкий» характер (один киловатт - час электроэнергии вряд ли может коренным образом изменить ситуацию). Поэтому их правильно учитывать с помощью штрафных функций. В дальнейшем будем предполагать, что это уже сделано при формировании свертки g .

Будем считать, что в отношении неопределенности притоков воды w_u и w_o оперирующая сторона ориентируется на математическое ожидание своего критерия g . Предположим, что площади посевов A_u и A_d выбираются до того, как станут известны реализации этих случайных величин, а остальные управления выбираются после того, как конкретные объемы станут известны. В таком случае управления $w_b, w_w, \dots$ следует считать функциями w_u и w_o . В этих условиях задача оптимизации имеет характер двухэтапной задачи стохастического программирования: максимальное математическое ожидание критерия оперирующей стороны определится формулой

$$\max_{A_u, A_d} M \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g$$

(здесь M обозначает оператор вычисления математического ожидания). [Данилов-Данильян др., 2007; Хранович, 2001].

Поиск оптимальных управлений. Выпишем необходимые условия оптимальности управлений в задаче, сформулированной в предыдущем разделе.

Уменьшив значение w_b на бесконечно малую величину δ , увеличив на ту же величину значение w_w , и не меняя остальных управлений, мы изменим значение критерия на величину $\left(\frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} - \frac{\partial g}{\partial e_b} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial w_b} \right) \delta$. Поэтому в точке оптимума должно

выполняться равенство $\frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} = \frac{\partial g}{\partial e_b} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial w_b}$.

По аналогичным соображениям, должно выполняться равенство $\frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} = \frac{\partial g}{\partial e_a} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial w_a}$.

Уменьшив значение c_u на бесконечно малую величину δ , увеличив на ту же величину значения w_w и c_d и не меняя прочих управлений, мы изменим значение критерия на величину $\left(\frac{\partial g}{\partial C} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial c_d} + \frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} + \frac{\partial g}{\partial f} p_e - \frac{\partial g}{\partial C} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c_u} \right) \cdot \delta$. Отсюда следует

Лемма 1. В оптимальной точке должно выполняться равенство

$$\frac{\partial g}{\partial C} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial c_d} + \frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} + \frac{\partial g}{\partial f} p_e = \frac{\partial g}{\partial C} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c_u}.$$

Из этого равенства и сделанных в предыдущем разделе предположений о монотонности вытекает следующее утверждение.

Следствие. Если $\frac{\partial g}{\partial e_w} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w_w} + \frac{\partial g}{\partial f} p_e > 0$, то $\frac{\partial g}{\partial C} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial c_d} < \frac{\partial g}{\partial C} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c_u}$.

Смысл леммы следующий: при прочих равных условиях сельскохозяйственное производство выгоднее размещать ниже по течению, поскольку при этом вода, до того как будет использована на полив, обеспечит выработку электроэнергии. Дополнительные условия означают, что доходы от производства электроэнергии должны окупать затраты, что при современных технологиях выполняется, если нет дефицита мощностей.

Фиксируем механизм расчета за воду. Будем считать, что рассматриваемая страна покупает воду у лежащей выше по течению по цене p_u и продает ниже лежащей стране по цене p_d .

Лемма 2. Пусть случайные величины w_u и w_u' таковы, что вероятность выполнения неравенства $w_u > x$ при любом x больше

вероятности выполнения неравенства $w_u' > x$. Если выполняется условие $p_u < p_d$, тогда значение критерия $\max_{A_u, A_d} M \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g$, вычисленное для величины w_u , больше, чем аналогичное значение, вычисленное для величины w_u' .

Доказательство. Фиксируем управления A_u и A_d , доставляющие максимум функции $M \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g$ при выполнении всех ограничений, описанных в предыдущем разделе, и функции w_b, w_w, w_a, c_u и c_d , реализующие максимум свертки g при всех значениях параметров w_u и w_o и при выполнении всех ограничений, описанных в предыдущем разделе. Тогда $g(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d - p_u w_u) < g'(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d - p_u w_u)$ (здесь g' – значение критерия в задаче, аналогичной описанной в предыдущем разделе, но с величиной w_u' вместо величины w_u). Значит,

$$\max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d - p_u w_u) < g'(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d - p_u w_u),$$

и тем более

$$\max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d - p_u w_u) < \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g'(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d - p_u w_u).$$

Отсюда последовательно получаем неравенства:

$$M \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d - p_u w_u) < M \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g'(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d - p_u w_u)$$

и

$$\max_{A_u, A_d} M \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d) < \max_{A_u, A_d} M \max_{w_b, w_w, w_a, c_u, c_d} g'(C, e_b, e_w, e_a, W_a, f, p_d w_d).$$

Лемма доказана.

Смысл леммы следующий: если поступающая вода дешевле продаваемой, то увеличение притока воды только увеличивает значение критерия.

Распределение ресурса в условиях кооперации. Рассмотрим страны, расположенные вдоль русла одной реки. Пронумеруем их натуральными числами от 1 до n сверху вниз по течению. Каждую из стран будем описывать моделью, аналогичной той, которая описана в первом разделе. Введем обозначения.

Пусть A_u^k – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная выше водохранилища по течению в k -ой стране, а A_d^k – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная ниже водохранилища в той же стране. Обе эти величины являются управлениями соответствующей страны.

Обозначим w^k – объем воды, приходящей на территорию k -ой страны через государственную границу, w_o^k – объем осадков, выпадающих непосредственно на территории данной страны. Величину w_o^k будем считать случайной с известным распределением вероятностей, которое определяется природными факторами. Пусть w_o^k – сброс воды через плотину водохранилища k -ой страны до периода полива, w_w^k – сброс воды через ту же плотину в период полива, w_a^k – сброс воды через плотину водохранилища этой страны после периода полива. Эти три величины считаем управлениями данной страны.

Аналогично: e_b^k – производство электроэнергии до периода полива, e_w^k – производство электроэнергии в период полива, e_a^k – производство электроэнергии после периода полива (все относится к k -ой стране). Будем считать, что производство электроэнергии определяется производственными функциями $e_b^k = \varphi^k(w_b^k)$, $e_w^k = \psi^k(w_w^k)$, $e_a^k = \varphi^k(w_a^k)$. Как и выше, считаем, что функции φ^k и ψ^k монотонно возрастают.

Пусть p_e^k – денежные затраты на производство единицы электроэнергии в k -ой стране.

Обозначим c_u^k – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся в k -ой стране выше по течению от водохранилища, а c_d^k – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся в той же стране, но ниже по течению. Эти величины тоже являются управлениями. Положим, как и ранее $Вер(c_u^k \leq w_u^k + w_o^k, c_d^k \leq w_w^k) \geq b$.

Пусть c_u^k – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной в k -ой стране на площадях, расположенных выше водохранилища, а c_d^k – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной в той же стране на площадях, расположенных ниже водохранилища. Будем считать, что объемы производства определяются производственными функциями $C_u^k = \Phi^k(A_u^k, c_u^k)$ и $C_d^k = \Psi^k(A_d^k, c_d^k)$. Как и прежде, будем предполагать, что при фиксированных A_u и A_d функции Φ^k и Ψ^k монотонно возрастают и вогнуты по c_u и c_d соответственно.

Пусть p_c^k – денежные затраты на производство единицы сельхозпродукции в k -ой стране. Принимаем балансовое соотношение $w^{k+1} = w_b^k + w_w^k + w_a^k - c_d^k$. Естественно считать, что $w^1=0$.

Пусть W_b^k – запас воды в водохранилище на начало года, W_a^k – запас воды в водохранилище на конец года. Также определяем балансовое соотношение

$$W_a^k = W_b^k + w^k + w_o^k - c_u^k - w_b^k - w_w^k - w_a^k.$$

Предположим, что k -я страна платит стране, лежащей непосредственно выше по течению, сумму m^k за используемую воду.

Будем считать, что цели k -ой страны описываются следующими вспомогательными критериями: производством сельхозпродукции $C^k = C_u^k + C_d^k$; объемами производства электроэнергии e_b^k , e_w^k и e_a^k ; вероятностью чрезвычайного положения в результате засухи в будущем, которая монотонно зависит от запаса воды W_a^k ; финансовыми затратами $f^k = p_e^k(e_b^k + e_w^k + e_a^k) + p_c^k C^k$; средствами $m^{k+1} - m^k$, вырученными за воду.

Предположим, что оперирующая сторона пользуется сверткой критериев $g^k(C^k, e_b^k, e_w^k, e_a^k, W_a^k, f^k, m^{k+1} - m^k)$. Относительно этой свертки и отношения страны к неопределенности делаем те же предположения, что и в первом разделе.

Эффективное распределение ресурсов. Один из эффективных (оптимальных по Парето) способов распределения водных ресурсов может быть найден следующим образом. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^n \max_{A_u^k, A_d^k} M \max_{w_b^k, w_w^k, w_a^k, c_u^k, c_d^k} g^k.$$

Найдем максимум этой суммы по всем управлениям всех стран и ценам на воду p^k , удовлетворяющим сформулированным в предыдущем разделе ограничениям (стандартные рассуждения показывают, что при разумных предположениях этот максимум достигается). Соответствующие управления будут эффективными [Гермейер, 1971, 1972, 1974; Карлин, 1964; Юдин, 1974].

Рассмотрим изолированное поведение игроков. Решим задачу оптимизации, описанную выше для первой страны. При этом будут найдены оптимальные управления как функции случайных параметров, и тем самым будет определена величина w^2 как

функция этих случайных параметров. Теперь можно решить аналогичную оптимизационную задачу для второй страны и т. д. Найденный набор управлений будем называть точкой status quo.

Фиксируем следующий механизм расчетов за воду. Будем считать, что за объем воды w^k , соответствующий точке status quo, страна ничего не платит, а воду сверх этого количества приобретает по цене p^k .

Сокращая затраты на полив участков, расположенных ниже водохранилища, на бесконечно малую величину δ , k -я страна уменьшит свой выигрыш на величину $\frac{\partial g^k}{\partial C^k} \cdot \frac{\partial \Psi^k}{\partial c_d^k} \delta$. Но при этом она получит дополнительные деньги $p^{k+1} \delta$, за счет чего ее выигрыш увеличится на величину $\frac{\partial g^k}{\partial m^{k+1}} p^{k+1} \delta$. Понятно, что такое сокращение выгодно, если $\frac{\partial g^k}{\partial C^k} \cdot \frac{\partial \Psi^k}{\partial c_d^k} < \frac{\partial g^k}{\partial m^{k+1}} p^{k+1}$.

Аналогично, если $k+1$ -я страна купит бесконечно малый объем воды δ по цене p^{k+1} , ее выигрыш уменьшится на величину $\frac{\partial g^{k+1}}{\partial m^{k+1}} p^{k+1} \delta$. Но эту воду она сможет использовать для производства электроэнергии и сельхозпродукции, за счет чего ее выигрыш увеличится на величину $\left[\frac{\partial g^{k+1}}{\partial C^{k+1}} \cdot \frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}} + \frac{\partial g^{k+1}}{\partial e_w^{k+1}} \cdot \frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}} \right] \delta$. Ясно, что приобретение воды выгодно, если $\frac{\partial g^{k+1}}{\partial C^{k+1}} \cdot \frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}} + \frac{\partial g^{k+1}}{\partial e_w^{k+1}} \cdot \frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}} > \frac{\partial g^{k+1}}{\partial m^{k+1}} p^{k+1}$.

Пусть выполняется неравенство

$$\frac{\frac{\partial g^{k+1}}{\partial C^{k+1}} \cdot \frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}} + \frac{\partial g^{k+1}}{\partial e_w^{k+1}} \cdot \frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}}{\frac{\partial g^{k+1}}{\partial m^{k+1}}} > \frac{\frac{\partial g^k}{\partial C^k} \cdot \frac{\partial \Psi^k}{\partial c_d^k}}{\frac{\partial g^k}{\partial m^k}}. \quad (1.27)$$

Тогда для любой цены p^{k+1} , удовлетворяющей условию

$$\frac{\frac{\partial g^{k+1}}{\partial C^{k+1}} \cdot \frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}} + \frac{\partial g^{k+1}}{\partial e_w^{k+1}} \cdot \frac{\partial \Psi^{k+1}}{\partial c_d^{k+1}}}{\frac{\partial g^{k+1}}{\partial m^{k+1}}} > p^{k+1} > \frac{\frac{\partial g^k}{\partial C^k} \cdot \frac{\partial \Psi^k}{\partial c_d^k}}{\frac{\partial g^k}{\partial m^k}}, \quad (1.28)$$

сделка по продаже воды по этой цене выгодна обеим сторонам.

Теорема 1. Пусть в точке status quo неравенства (1.27) выполняются для всех k . Тогда точка status quo не является эффективной.

Доказательство. Как показано выше, передача достаточно малых количеств воды сверху вниз по ценам, удовлетворяющим неравенствам (1.28) приводит к увеличению выигрышей всех стран, поэтому точка status quo не может быть эффективной. В частности,

в ней не достигается максимум суммы $\sum_{k=1}^n \max_{A_u^k, A_d^k} M \max_{w_b^k, w_w^k, w_a^k, c_u^k, c_d^k} g^k$.

Понятно, что неравенство (1.27) выполняется, если страны находятся в «равных» природных и экономических условиях. На практике интересен случай, когда страны, лежащие ниже по течению, испытывают большую нужду в воде. В таком случае разница между левой и правой частями неравенства (1.27), а следовательно, и возможность компромисса еще больше. Выгода от кооперации может быть даже больше, чем описано в данной модели, если нижележащая страна может платить за воду не деньгами, а сельхозпродукцией, что смягчает ограничения по продовольственной безопасности. В случае, если имеется единая энергетическая система, то же относится и к ограничениям по энергетической безопасности.

Динамический вариант модели. Предлагаемый подход ориентирован на исследование целесообразности кооперации при управлении водными ресурсами на качественном уровне. Рассмотрим страны, расположенные в «линейном» бассейне одной реки. Пронумеруем их натуральными числами от 1 до n сверху вниз по течению. Будем предполагать, что в рассматриваемых странах имеется по одной электростанции и при них водохранилища, позволяющие создавать запасы воды. Рассмотрим функционирование водной системы на конечном отрезке времени. Каждому году присвоим номер (натуральное число) t , изменяющийся на интервале $1, \dots, T$. Введем обозначения. Пусть $A_u^k(t)$ – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная выше водохранилища по течению в k -ой стране в году t , а $A_d^k(t)$ – площадь, занятая под сельскохозяйственные культуры и расположенная ниже водохранилища в той же стране и том же году. Обе эти величины являются управлениями соответствующей страны.

Обозначим $w^k(t)$ – объем воды, приходящей на территорию k -ой страны через государственную границу в году t , $w_o^k(t)$ – объем осадков, выпадающих непосредственно на территории данной

страны в году t . Величины $w_o^k(t)$ будем считать случайными с известными распределениями вероятностей, которые определяются природными факторами. Пусть $w_b^k(t)$ – сброс воды через плотину водохранилища k -ой страны до периода полива в году t , $w_w^k(t)$ – сброс воды через ту же плотину в период полива в том же году, $w_a^k(t)$ – сброс воды через плотину водохранилища этой страны после периода полива в году t . Эти три величины считаем управлениями данной страны.

Аналогично: $e_b^k(t)$ – производство электроэнергии на электростанции до периода полива, $e_w^k(t)$ – производство электроэнергии на электростанции в период полива, $e_a^k(t)$ – производство электроэнергии на электростанции после периода полива (все относится к k -ой стране и году t). Будем считать, что производство электроэнергии определяется производственными функциями выработки $e_b^k(t) = \varphi^k(w_b^k(t))$, $e_w^k(t) = \psi^k(w_w^k(t))$, $e_a^k(t) = \varphi^k(w_a^k(t))$. Считаем, что функции φ^k и ψ^k являются монотонно возрастающими от своих аргументов. Обозначим p_e^k – денежные затраты на производство единицы электроэнергии в k -ой стране. Обозначим $c_u^k(t)$ – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся в k -ой стране выше по течению от водохранилища в году t , а $c_d^k(t)$ – объем воды, затрачиваемый на полив из источников, находящихся в той же стране, но ниже по течению от водохранилища в том же году. Эти величины тоже являются управлениями. Примем ограничения на выбор управлений в форме вероятностных ограничений, что обеспечивает уровень гарантированной отдачи водного объекта: $Вер(c_u \leq w_u + w_o, c_d \leq w_w) \geq b$, где уровень b характеризует гарантию, на которую рассчитывает управляющий орган страны. Пусть $C_u^k(t)$ – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной в k -ой стране на площадях, расположенных выше водохранилища, в году t , а $C_d^k(t)$ – объем сельскохозяйственной продукции, произведенной в той же стране на площадях, расположенных ниже водохранилища, в том же году. Будем считать, что объемы производства определяются производственными функциями $C_u^k(t) = \Phi^k(A_u^k(t), c_u^k(t))$ и $C_d^k(t) = \Psi^k(A_d^k(t), c_d^k(t))$, и предполагать, что при фиксированных $A_u(t)$

и $A_e(t)$ функции Φ и Ψ монотонно возрастают и вогнуты по $c_u(t)$ и $c_d(t)$ соответственно.

Пусть $p_c^k(t)$ – денежные затраты на производство единицы сельхозпродукции в k -ой стране в году t . Предположим, что в году t k -я страна получает от $k+1$ -ой страны сумму $m^{k+1}(t)$ в уплату за пропускаемую воду в объеме $w^{k+1}(t)$.

Относительно водных потоков примем балансовое соотношение $w^{k+1}(t) = w_b^k(t) + w_w^k(t) + w_a^k(t) - c_d^k(t)$. Естественно считать, что $w^1 = 0$.

Примем следующие условия, сформулированные выше в виде лемм: а) при прочих равных условиях сельскохозяйственное производство выгоднее размещать ниже по течению, поскольку при этом вода, до того как будет использована на полив, обеспечит выработку электроэнергии; б) доходы от производства электроэнергии должны окупать затраты, что при современных технологиях выполняется, если нет дефицита мощностей; в) если поступающая вода дешевле продаваемой, то увеличение притока воды только увеличивает значение критерия страны.

Пусть $w^k(t)$ – объём воды в водохранилище страны k на конец года t . Тогда $W^k(t) = W^k(t-1) + w^k(t) + w_o^k(t) - c_u^k(t) - w_b^k(t) - w_w^k(t) - w_a^k(t)$.

В данной модели именно это ограничение определяет динамический характер задачи. Величину запасов воды в начале планового периода $W^t(0)$ будем считать заданным параметром. Будем считать, что цели k -ой страны описываются следующими вспомогательными критериями:

- производством сельхозпродукции $C^k(t) = C_u^k(t) + C_d^k(t)$,
- объемами производства электроэнергии $e_b^k(t)$, $e_w^k(t)$ и $e_a^k(t)$,
- вероятностью чрезвычайного положения в результате засухи в будущем, которая монотонно зависит от запаса воды $W^k(t)$,
- финансовыми затратами $f^k(t) = p_e^k(t)(e_b^k(t) + e_w^k(t) + e_a^k(t)) + p_c^k(t)C^k(t)$,
- средствами $m^{k+1}(t) - m^k(t)$, вырученными за воду.

Предположим, что страны пользуются сверткой критериев $\sum_{t=1}^T \lambda_t g_t^k(C^k(t), e_b^k(t), e_w^k(t), e_a^k(t), W^k(t), f^k(t), m^{k+1}(t) - m^k(t))$. Предполагаем,

что функция g_t^k убывает по аргументу f и возрастает по остальным аргументам. Величины λ_t интерпретируются как коэффициенты дисконтирования. Будем предполагать, что в условиях неопределённости страна ориентируется на математическое ожидание, причем в момент принятия решения о размере посевных площадей $A_u^k(t)$ и $A_d^k(t)$ в году t стране известны конкретные реализации случайных величин за все предыдущие годы. А при выборе всех остальных управлений, кроме того, известны и реализации случайных величин за текущий год. Учитывая данные предположения, задача выбора оптимального поведения носит характер двухэтапной задачи динамического стохастического программирования.

Для обоснования принципа рациональности объединения в коалицию воспользуемся схемой динамического программирования. Введем обозначения. Пусть $P_t(\xi_t^1, \dots, \xi_t^n | \eta_{t-1}^1, \dots, \eta_{t-1}^n, \dots, \eta_1^1, \dots, \eta_1^n)$ обозначает вероятность того, что выполняется система неравенств

$$w_o^k(t) \leq \xi_t^k, \quad k = 1, \dots, n,$$

при условии, что имеют место равенства

$$w_o^k(\tau) = \eta_\tau^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad \tau = t-1, \dots, 1.$$

Обозначим M_t оператор вычисления математического ожидания по распределению $P_t(\xi_t^1, \dots, \xi_t^n | \eta_{t-1}^1, \dots, \eta_{t-1}^n, \dots, \eta_1^1, \dots, \eta_1^n)$.

Схема метода динамического программирования для вычисления оптимальных результатов игроков при *изолированных действиях* и их оптимальных стратегий выглядит следующим образом. Положим

$G_{T+1}^k(w^k(T), W^k(T-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(T), \dots, w_o^n(T)) = 0$. Пусть

$$\begin{aligned} & H_t^k(A_u^k(t), A_d^k(t), w^k(t), W^k(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t), \dots, w_o^n(t)) = \\ & = \max_{w_b^k(t), w_w^k(t), w_a^k(t), c_u^k(t), c_d^k(t)} [G_{t+1}^k(w^k(t), W^k(t), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t), \dots, w_o^n(t)) + \\ & \quad + \lambda_t g_t^k(C^k(t), e_b^k(t), e_w^k(t), e_a^k(t), W^k(t), f^k(t), m^{k+1}(t) - m^k(t))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & I_t^k(A_u^k(t), A_d^k(t), w^k(t), W^k(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t-1), \dots, w_o^n(t-1)) = \\ & = M_t H_t^k(A_u^k(t), A_d^k(t), w^k(t), W^k(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t), \dots, w_o^n(t)), \end{aligned}$$

$$G_t^k(w^k(t), W^k(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t-1), \dots, w_o^n(t-1)) = \\ = \max_{A_u^k(t), A_d^k(t)} I_t^k(w^k(t), W^k(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t), \dots, w_o^n(t)), \quad k=1, \dots, n, \\ t=T, \dots, 1.$$

Здесь максимумы вычисляются по всем значениям управлений, удовлетворяющих перечисленным выше ограничениям последовательно, начиная с $k=1, t=T$, до $k=n, t=T$, затем с $k=1, t=T-1$, и так далее, пробегая в возрастающем порядке все значения k , и потом уменьшая на 1 значение t .

Величина $G_o^k(W^k(0))$ равна оптимальному значению критерия k -ой страны, а величины, доставляющие максимумы в предыдущих выражениях дают оптимальные стратегии в изоляции. Совокупность состояний стран, принимающих изоляционистское поведение в соответствии с вышеизложенными вычислениями, определим как состояние status quo для группы стран.

Аналогичным образом вычисляется максимум математического ожидания суммарного *коалиционного* результата (выигрыш) стран:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^T \lambda_t g_t^k(C^k(t), e_b^k(t), e_w^k(t), e_a^k(t), W_a^k(t), f^k(t), p^{k+1}(t)w^{k+1}(t) - p^k(t)w^k(t)).$$

$$\text{Положим } G_{T+1}(w^k(T), W^1(T-1), \dots, W^n(T-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(T), \dots, w_o^n(T)) = 0.$$

Пусть

$$H_t(A_u^k(t), A_d^k(t), w^k(t), W^1(t-1), \dots, W^n(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t), \dots, w_o^n(t)) = \\ = \max_{\substack{w_b^k(t), w_w^k(t), w_o^k(t), c_u^k(t), c_d^k(t), p^k(t) \\ k=1, \dots, n}} [G_{t+1}(w^k(t), W^1(t-1), \dots, W^n(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t), \dots, w_o^n(t)) + \\ + \sum_{k=1}^n \lambda_t g_t^k(C^k(t), e_b^k(t), e_w^k(t), e_a^k(t), W_a^k(t), f^k(t), m^{k+1}(t) - m^k(t))],$$

$$I_t(A_u^k(t), A_d^k(t), w^k(t), W^1(t-1), \dots, W^n(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t-1), \dots, w_o^n(t-1)) = \\ = M_t H_t(A_u^k(t), A_d^k(t), W^1(t-1), \dots, W^n(t-1), w^k(t), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t), \dots, w_o^n(t)),$$

$$G_t(w^k(t), W^1(t-1), \dots, W^n(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t-1), \dots, w_o^n(t-1)) = \\ = \max_{\substack{A_u^k(t), A_d^k(t) \\ k=1, \dots, n}} I_t(w^k(t), W^1(t-1), \dots, W^n(t-1), w_o^1(1), \dots, w_o^n(1), \dots, w_o^1(t), \dots, w_o^n(t)), \\ t=T, \dots, 1.$$

Искомый результат равен $G_1(W^1(0), \dots, W^n(0))$, а оптимальные стратегии находятся при решении задач максимизации в промежуточные моменты.

В работе [Ерешко и др., 2008] при сделанных содержательных предположениях был сформулирован качественный вывод о целесообразности коалиции стран в рамках описанной модели. Теперь, на основе доказанной теоремы, по индукции, начиная с $t=T$ и кончая $t=1$, проверяется, что на каждом шаге описанных в динамическом случае алгоритмов решаются задачи, полностью аналогичные задачам, решавшимся двумя разделами выше при анализе статических моделей. Поэтому все качественные выводы, полученные ранее относительно эффективности объединения стран в коалицию и возможности улучшения положения стран по сравнению с состоянием status quo, сохраняются и в динамическом случае. Решающим фактором является возможность использования нижележащими странами «доброжелательных» попусков вышележащих стран, а также возможность прямых обменов товарами и ресурсами без денежных расчётов. Разумеется, эффект от кооперации будет накапливаться от года к году.

Учет разветвленности речного бассейна. На практике интересен случай, когда рассматриваемая река имеет притоки и в каждой стране находится несколько электростанций. Рассматриваемая модель в принципе обобщается на такой случай, однако формулы оказываются слишком громоздкими для аналитического исследования. Однако сделанный выше качественный вывод о целесообразности кооперации сохраняется. Показать это можно следующим образом.

Как и в упрощенной модели, найдем точку status quo. Для этого придется последовательно решить несколько задач оптимизации. Каждая из них, вообще говоря, сложнее, чем в уже рассмотренном случае, однако в принципе исследуется тем же способом. Можно, используя частичные вариации получить необходимые условия оптимальности первого порядка. Основное из них будет состоять в том, что разница маргинальных эффективностей производства сельхозпродукции на любых двух участках должна равняться сумме маргинальных эффективностей производства электроэнергии на всех электростанциях, расположенных между этими участками.

Зафиксируем на рассматриваемой реке одну точку в устье и одну точку в истоке. Выделим на единственном простом пути, соединяющем эти точки, по одной электростанции на территории

каждой страны. Управления, относящиеся ко всем другим электростанциям и прилегающим к ним сельскохозяйственным угодьям, положим равными соответствующим значениям в точке status quo и зафиксируем. Получим задачу, полностью аналогичную рассмотренной выше. В силу доказанной теоремы, найдутся управления, которые дают всем игрокам выигрыши большие, чем в точке status quo. Если мы теперь «отпустим» ранее зафиксированные управления, то выигрыши всех игроков могут только увеличиться, то есть точка status quo тем более не является эффективной.

Рассмотренные в данной главе модели соответствуют уровню располагаемой информации, то есть степени ее точности и достоверности. Так, на уровне распределения квот на воду между государствами принятие решений осуществляется на основе агрегированной информации и недостаточно достоверной информации. Вследствие этого принимались некоторые ограничения, типа: *использование обобщенной информации; выбор диспетчерского правила управления с двумя линиями переключения (хотя в действительности количества этих линий много); производство энергии, зависящее от объемов воды, с учетом того, что этот объем используется наилучшим образом внутри каждого государства.*

Часть II
УПРАВЛЕНИЕ
ВОДНЫМИ РЕСУРСАМИ

Г л а в а 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ВОДОХРАНИЛИЩАМИ

Глава II монографии посвящена разработке математических моделей управления режимами работы водохранилищ, которые представляют собой неотъемлемый атрибут регулирования речного стока. Применение математических моделей и компьютерных технологий обеспечивает совершенствование правил управления водохранилищами при единообразном подходе к их составлению с учетом специфики водных объектов, расположенных как в национальных, так и в трансграничных бассейнах.

Основная задача заключается в том, чтобы найти рациональное правило использования воды между двумя крупными отраслями водопользования: сельским хозяйством и гидроэнергетикой, как в рамках национальных границ, так и в рамках трансграничных бассейнов.

2.1. Разработка методов построения правил управления водохранилищами

Водохозяйственные системы. Водохозяйственные системы следует рассматривать как объект (объективную реальность), на основе которого нужно определить необходимые абстрагированные понятия, относящейся к системе. Речь идет о реальных системах, поскольку они построены на объективных данных. Тогда *водохозяйственную систему можно характеризовать как совокупность элементов¹⁾, объединенных взаимными связями в единое целое.*

Элементы водной системы могут быть как естественными (осадки, водотоки, озера, подземные воды и т.п.), так и искусственными (водохозяйственные объекты и установки, водохранилища, каналы, гидроэлектростанции, насосные станции и т.п.).

Элементы могут иметь как прямые, так и опосредственные через другие элементы связи, как материальные (подача воды), так и нематериальные (организационные связи). Водохозяйственные

системы в большинстве случаев являются "открытыми", т.е. элементы этих систем имеют связи с внешней средой.

Если часть элементов в системе имеет между собой более тесные связи, чем с остальными той же системы, то внутри ее образуется достаточно самостоятельная система, которую можно назвать подсистемой.

Взаимосвязи между элементами и подсистемами водохозяйственной систем могут быть территориальными, гидрологическими, техническими, экономическими и т.д. Таким образом, целевая водохозяйственная система представляет собой комплекс материальных элементов, целей и функциональных связей. В соответствии с их назначением водохозяйственные системы могут быть гидромелиорационными, гидроэнергетическими и навигационными, могут предназначаться для водоснабжения, разведения рыбы, а также одно- и многоцелевыми.

Одноцелевая водохозяйственная система включает в себя множество элементов, функция которых подчинены достижению одной цели (например, система гидроэлектростанций, комплекс сооружений для защиты от наводнений и т.п.). Цель, для которых предназначена такая система, задается с самого начала разработки проекта, часто в виде определенных технических параметров.

Многоцелевые водохозяйственные системы состоят из множества элементов и предназначены для различных целей. Основная задача при их расчете заключается в поиске такой комбинации этих элементов и их свойства, которая являлась бы оптимальной. Поскольку отдельные цели являются взаимоисключающими, поиск оптимального решения является сложной задачей. Задача нахождения оптимального решения (значения критериальной функции) существенно упрощается, если одну из целей (например, снабжение водой) выбрать в качестве основной. Тогда можно будет исследовать многоцелевую систему как одноцелевую, и рассматривать остальные цели как лимитирующие условия.

Кроме основных признаков систем (непрерывность и единство) многоцелевые водохозяйственные системы имеют и все признаки сложности:

- большая протяженность с большим числом подсистем и элементов, входов и выходов, а также функциональных связей;
- изменение одной величины влечет за собой изменение целого ряда связанных с ней переменных величин (например, изменение гидрологических условий);
- динамичность (с течением времени изменяются как водные ресурсы, так и потребление);
- входные гидрологические данные и нагрузка в системе имеют случайный характер (расход, потребление и качество воды точно не установлены; процессы, происходящие в системе, являются случайными и характеристики системы имеют в лучшем случае статистический характер);
- требования к функциям многоцелевых водохозяйственных систем являются взаимоисключающими (требование ограничения площади водохранилищ лимитирует их объем, повышение потребления воды для одной цели вызывает сокращения потребления для других нужд);
- при управлении и реализации функций многоцелевых водохозяйственных систем используют большое количество оборудования, современной вычислительной техники, причем часть функций автоматизирована;
- эксплуатация многоцелевых водохозяйственных систем невозможна без участия человеческого фактора, которые наблюдают, измеряют, разрабатывают технологию и управляют рабочими процессами в соответствии с функциональным назначением системы;
- функции этих систем не могут быть выражены лишь в технических или экономических параметрах; поскольку данные системы являются существенной частью среды обитания, для их оценки необходимо использовать не только экономические показатели.

Системный подход к водохозяйственному планированию не ограничивается математическим моделированием, модели могут представлять достаточно четко и последовательно важные взаимосвязи и взаимодействия между различными системами управления и пользователями ВХС. Модели позволяют оценить экономические и физические последствия различных инженерных решений, стратегий управления и различных гипотез о будущем

стоке, технологии, затратах, социальных и юридических требованиях. Такая системная методология не позволяет выбирать наилучшие цели и гипотезы; *однако она помогает найти хорошие решение при заданных целях.*

При оценке роли системной методологии в процессе водохозяйственного планирования необходимо учитывать свойственные моделям ограничения в представлении любой конкретной проблемы. Некоторые входные данные могут быть противоречивыми или неопределенными, что, конечно, отразится и на результатах. Будущее не может быть точно спрогнозированным, и наши знания, касающиеся любой водохозяйственной проблемы, всегда ограничены. Кроме того, результаты любого количественного анализа вариантов часто составляют лишь часть информации, используемой в общем, планировании и процессе принятия решения. Не менее важным могут быть и чисто качественные факторы, включая субъективные выводы, базирующиеся на результатах количественного анализа. *Следовательно, нельзя рассчитывать на прямое использование конкретных результатов любого количественного системного исследования.*

Успех системного исследования зависит от ответа на следующие вопросы:

- *является ли данное исследование полезным при планировании и в процессе принятия решения;*
- *становится ли обсуждение вопроса о правильном выборе вариантов более информативным в результате таких исследований?;*
- *вводит ли оно варианты решения, которые без этого исследования не рассматривались бы?.*

Пути решения конкретной водохозяйственной проблемы с помощью моделирования зависят от:

- критериев анализа;
- исходных данных, требуемых для оценки проекта;
- времени, отведенного для анализа, материальных средств и вычислительных возможностей;
- квалификация специалистов, разрабатывающих модели.

В начальной стадии разработки математических моделей водохозяйственных систем необходимо учитывать все возможные

элементы, факторы, явления и взаимосвязи между ними, с тем, чтобы избежать излишней схематизации, но, тем не менее, иметь возможность оценить их эффективность. Последовательный анализ структуры и функций водохозяйственной системы дает возможность научно обосновать некоторые упрощения при разработке модели системы.

Вообще говоря, *создание модели–искусство*, требующее умения абстрагироваться от физических особенностей компонентов, которые важны для принятия решения и могут быть описаны количественными методами, и умения выразить эти компоненты и их взаимосвязи в форме математической модели.

Выбор математической модели для расчета ВХС.

После распада Советского Союза, система водного хозяйства вступило в фазу, когда, каждая независимая государства, некогда работающее в рамках общей распределительной системы, стремится к самостоятельному использованию имеющихся водных ресурсов, исходя, прежде всего из экономических требования своей страны.

Например, до недавнего времени Центрально-азиатские республики эксплуатировали систему водных ресурсов бассейнов рек Сырдарьи и Амударьи в рамках распределительных схем, рассматривающий регион как пространство, управляемое из одного центра.

Сегодня, после распада Советского Союза изменились как политические, так и экономические системы всех центрально-азиатских государств.

После провозглашения независимости, каждое из государств этого региона стремиться к максимальному использованию имеющихся водных ресурсов бассейнов своих рек исходя из собственных экономических и политических интересов.

В этой ситуации проблема комплексного использования водных ресурсов бассейнов рек Центральной Азии приобретают совершенно новые звучания. Ее решение должно быть основано в первую очередь на учете независимости отдельных государств и уже развивающихся рыночных отношениях между ними.

В единой постановке такая задача и соответствующая ей модель чрезвычайно сложно. Одним из наиболее трудных вопросов в оптимизации использования водно-энергетических ресурсов крупного региона является выделение основных целей и

определение относительной важности каждой из них. У каждого отдельного государства, а также у региона в целом, как правило, имеется несколько целей, часто несовместимых друг с другом, к тому же изменяющихся во времени. Некоторые из этих целей трудно оценить качественно, а те, для которых это, возможно, часто выражаются в несопоставимых единицах.

Все это приводит к тому, что при планировании использования водных ресурсов обычно очень трудно найти удачную комбинацию несопоставимых, зачастую конфликтных целей, задач и накладываемых на них сложных ограничений и представить все это в виде единой системы.

На практике такие сложные и многоплановые задачи решаются обычно в рамках системного анализа. Это позволяет, разложив сложные явления на его отдельные, более мелкие и понятные составляющие подсистемы, провести сначала анализ их самих, а затем и взаимосвязей между ними. Таким образом методика системного анализа позволяет достичь максимальных результатов при минимальных затратах труда и средств.

Водохозяйственные системы с искусственными элементами (*водохозяйственные объекты и установки, водохранилища, каналы, ГЭС, насосные станции и т.д.*) создаются с определенной целью, для выполнения определенных функций и по возможности в определенном режиме, т.е. соответствующим определенным экономическим и социальным критериям оптимальности.

В составе ВХС эксплуатируются, сооружаются и проектируются водохранилища, которые приспособливают неравномерный и асинхронный сток разных рек и их притоков к переменным во времени требованиям различных водопотребителей и водопользователей системы (*гидроэнергетика, ирригация, водный транспорт, водоснабжение и т.д.*).

Совместная работа нескольких водохранилищ в системе по сравнению с изолированной дает ряд преимуществ, которые заключаются в увеличении гарантированных отдач водохранилищ и в повышении полезного использования речного стока [Водоэнергетические расчеты..., 1969, *Шимельмиц и др*, 1960].

Основной трудностью создания методологии оптимального управления режимами работы водохозяйственных систем является необходимость построения таких правил управления в условиях отсутствия прогноза речного стока и водопотребления с

необходимой заблаговременностью и точностью. Такие правила могут быть построены лишь на основе вероятностного описания колебания речного стока [Картвелишвили, 1967, Цветков, 1967]**) и водопотребления.

Кроме того, немалые трудности возникают при оценке экономических характеристик, определяющих собой целевую функцию, подлежащую оптимизации. Для экономической оценки целевой функции требуется проведение [Бесчинский и др., 1979] сложного анализа не только многоцелевой водохозяйственной системы, но и нескольких смежных с ней систем (электроэнергетической, транспортной и т.п.).

При решении задач, связанных с ВХС, возможны следующие варианты:

- *водохозяйственная система существует и необходимо оптимизировать ее функции путем изменения условий эксплуатации;*
- *ВХС существует и необходимо ее дополнить с тем, чтобы она выполняла свои функции более качественно или же выполняла и некоторые другие функции;*
- *ВХС не существует и необходимо проектировать и реализовать ее.*

Нами в основном рассматривается первый вариант, когда на базе имеющийся ВХС, требуется нахождение рациональных правил управления системы. При этом, будут рассмотрены некоторые вопросы методологии построения правил управления режимами каскадов водохранилищ гидроэлектростанций и удовлетворяющих заданные требования участников водохозяйственного комплекса.

Правила управления режимами работы водохранилищ могут быть жесткими и гибкими. Жесткость управления обеспечивает высокий гарантированный минимум отдачи водохранилища с заданной надежностью. Гибкий способ управления может дать максимальное использование стока реки для выработки энергии или для обеспечения в энергетической системе минимума затрат на топливо [Крицкий и др., 1969].

В практике обычно как, безусловно, жесткий, так и наиболее гибкий планы регулирования в чистом виде не встречаются. Как правило, крупные водохранилища гидростанций могут обеспечивать некоторый гарантированный минимум отдачи и

рационально использовать избытки воды для производства дополнительной над гарантированной выработки энергии.

Для того чтобы рассчитать ВХС, создают упрощенную модель, которая будет выполнять требуемые функции. Эта работа включает следующие три этапа:

- *применение разработанной модели к ВХС;*
- *анализ структуры и поведения модели;*
- *подготовка соответствующих корректировок и введение их в модель.*

Правильная разработка математической модели системы – основное условие успешного решения проблемы. При разработке модели ВХС необходимо проверить правильность и точность формулировок поставленной для расчета модельной задачи; задать разрешающий уровень модели и в соответствии с этим выбрать элементы, подсистемы и окружающую среду и определить их функции в системе; выявить связи между отдельными частями системы и между моделью и окружающей средой; выбрать способ изображения модели (графический, матричный, блок-схемы и .п.).

Упрощение применяется для сложных систем и, как правило, представляет собой компромисс между двумя взаимоисключающими требованиями:

- *система не упрощенная;*
- *система слишком упрощена.*

Для более быстрой и дешевой обработки информации необходимо выбрать среднюю степень упрощения модели между двумя его упомянутыми крайностями. Не очень сложные системы можно упрощать прямыми методами. Для упрощения ВХС можно в принципе, использовать следующие методы.

- исключение или агрегирование нескольких элементов и связей системы;
- замещение и преобразование переменных величин и соотношений;
- расчленение на подсистемы.

Агрегирование можно проводить следующими способами:

- статистическими;
- логическими;
- с использованием прототипов.

Замещение и преобразование переменных или соотношений этих величин применяют для упрощения описания системы или преобразования его в известную форму.

Расчленение на подсистемы применяют для сложных систем, причем расчет подсистем осуществляют как для самостоятельных систем, в результате чего расчет исходной системы упрощается.

Для проверки системы успешно применяют методы имитации системы. Сущность этих методов заключается в том, что с их помощью можно оценивать поведения системы, которая не может быть реализована ради эксперимента ввиду ее большой сложности.

При выборе режима работы водохозяйственных систем широко используются реализованные на ЭВМ математические модели ВХС.

Требования, предъявляемые к этим моделям, разнообразны и зачастую противоречивы. С одной стороны, модель должна адекватно описывать реальную систему и поэтому ее размерность для ВХС, состоящих из нескольких водохранилищ с ГЭС, неизбежно оказывается весьма большой.

С другой стороны, выбор режима эксплуатации предполагает сравнение разных вариантов параметров системы и управляющих воздействий. Поэтому модель должна быть достаточно “быстрой” (т.е. время на расчет одного варианта не должно быть слишком велико) и легко модифицируемой; эти требования приводят к ограничениям на размерность модели. Разумеется, допустимая размерность конкретной модели определяется мощностью ЭВМ, развитостью средств работы с программами и с массивами данных и т.д. Тем не менее, часто оказывается невозможным совместить все требования в рамках одной модели. В этом случае рассматривается некоторый набор последовательно усложняющихся моделей. При этом на подробных моделях в имитационном режиме проводится сравнение и уточнение лишь небольшого числа вариантов, предварительно отобранных с использованием моделей меньшей размерности, к которым применимы более сложные процедуры анализа и отбраковки вариантов.

В частности, более “грубые” модели используются для отыскания управляющих воздействий в автоматизированном или в

автоматическом режиме с использованием формализованных критериев оценки качества функционирования системы.

Благодаря развитию компьютерной технологии, в настоящее время, широко используются математические модели управления ВХС, в частности управления режимами работы водохранилищ.

В бывшем Советском Союзе для оптимизации режимов работы водохранилищ ГЭС при их эксплуатации ЭВМ были впервые использованы Е.В. Цветковым [Цветков, 1967].

В бывшем пространстве Советского Союза, составлялись вычислительные программы для ЭВМ и использовались в Энергосетьпроекте для Волжско-Камского, Ангара-Енисейского, Нарын-Сырдарьинского, Чирчикского, Вахско-Амударьинского и некоторых других крупных каскадов гидроузлов. Полученные с помощью этих программ водоэнергетические и водохозяйственные показатели указанных каскадов гидроузлов использовались в Гидропроекте и Союзгипроводхозе при проектировании мероприятий по переброске стока северных рек в бассейн Волги, сибирских рек – в район Средней Азии и Казахстана, при проектировании новых гидроузлов в составе каскадов. Аналогичные программы в настоящее время составляются в Гидропроектах и Гипроводхозах СНГ для решения водо-энергетических и водохозяйственных задач.

Особенностью отмеченных программ является необходимость при построении правил управления режимом работы гидроузлов использовать некоторые эвристические итерационные процедуры. Разработка правил управления в соответствие со всеми ранжированными критериями оптимальности для сложных каскадов гидроузлов очень трудоемка, требует больших затрат времени, в том числе и машинного. Основные затраты машинного времени связаны с составлением правил управления гидроузлами. Непосредственный расчет показателей режимов работы гидроузлов по готовым правилам управления ведется на ЭВМ автоматически и не требует больших затрат времени и вмешательства человека.

Общие затраты времени инженера, программиста и ЭВМ для проведения водо-энергетических расчетов велики. Переход в некоторой части решения задачи к применению новой компьютерной технологии (создание удобного интерфейса пользователя в рамках информационной системы, на основе использования новейших разработок программного обеспечения)

позволить значительно сократить эти затраты времени. Работа в этом направлении введется давно, как инженерно-проектных организациях, так и в академических институтах.

Наиболее перспективным является использование новой компьютерной технологии непосредственно для определения правил управления. Для этого необходимо по мере возможности формализовать и запрограммировать алгоритмы определения правил управления сложным многоступенчатым каскадом гидроузлов.

Математические модели. Приведем математические формулировки определений и основных понятий, данных ранее в водохозяйственных терминах. С математической точки зрения гидроузлы с водохранилищами представляют собой динамическую систему, функционирующую в условиях неопределенности. В исследовании операций неопределенными факторами называют такие неконтролируемые (т.е. не поддающиеся воздействию) факторы, для которых “... известна только область распределения факторов, внутри которой они могут находиться, или область, внутри которой находятся закон распределения ...” [Гермейер, 1971]. Неопределенным фактором в рассматриваемой задаче является естественный приток воды в водохранилища. В качестве закона изменения притока в инженерной гидрологии обычно применяют пирсоновские законы распределения вероятностей. Принято, предположение о том, что известно некоторое множество, представляющее собой совокупность значений притоков, из которого, может реализоваться любой приток. Такое, множество может быть получено из наблюдаемого ряда притоков или ряда, смоделированного каким-либо методом, например методом Монте-Карло [Резниковский и др., 1979, Сванидзе, 1977].

Стратегией оперирующей стороны согласно основам исследования операций называется “правило поведения, разрешенное ожидающиеся информацией” [Резниковский и др., 1979]. Для комплексного гидроузла или каскада гидроузлов стратегией является правило попусков воды их водохранилищ и заборов воды*. Управление режимами работы водохранилищ должно обеспечить выполнение требований водопользователей и водопотребителей, которые ранжируются в порядке важности.

* В описываемых ниже исследованиях рассматривается частный случай, когда правила назначения заборов воды известны.

В водохозяйственной практике, как уже было отмечено, накоплен большой опыт разработки правил управления водохранилищами. Часто управление водохранилищами осуществляется с помощью, так называемых диспетчерских правил управления*, которые разрабатываются на базе имитационной модели гидроузлов.

Диспетчерские графики – это один из способов представления правил управления режимом работы водохранилищ. В его основе лежит следующее правило: *в каждый интервал времени того или иного сезона года размер отдачи гидроузла назначается в соответствие с запасом воды в водохранилище*. Диспетчерские графики известны еще с прошлого века [Проектирование схем..., 1966]. В общем случае на диспетчерском графике указываются правила:

- *сохранения запасов воды для обеспечения гарантированной отдачи;*
- *современного опорожнения емкости водохранилища для аккумуляции паводочного стока;*
- *перераспределения во времени воды и энергии, превышающей гарантированную.*

Состав этих правил определяется назначением гидроузла, его регулирующими возможностями и функциями в управлении системой, а также особенностями развития последней [Резниковский и др., 1984].

В аналитической записи диспетчерский график представляет собой

$$u_t = f(x_t) \quad (2.1)$$

которая показывает, какую отдачу (мощность ГЭС, расходы воды в оросительный канал, расход воды в нижний бьеф и т.д.) нужно назначить при эксплуатации сооружения в t -й интервал времени в зависимости от уровня воды в водохранилище на начало этого интервала. Функция вида (2.1) есть управляющая функция, с помощью которой может осуществляться управление режимом работы водохранилища при отсутствии прогноза стока. Такие

* Здесь и далее под диспетчерскими правилами управления имеются в виду только правила в виде графика в координатах *объема воды в водохранилище или уровень верхнего бьефа – время года*, разбитого на зоны (ограничение на число зон не накладывается), в пределах которых режим работы водохранилища определяется как непрерывная функция от объема воды в водохранилище определяется как непрерывная функция от объема воды в водохранилище или уровня верхнего бьефа и времени года.

функции дают однозначные практические рекомендации по назначению отдач водохранилища.

Цель описываемых ниже математических исследований в этой области состоит в автоматизации процесса определения правил управления гидроузлами. Сущность предлагаемого подхода к решению задачи состоит в многократном последовательном использовании математических моделей разного уровня детализации – от самых простых (аналитических) до наиболее подробных (имитационных), а также оптимизационных моделей (так называемых, расчетных моделей), позволяющие нахождение правил управления при многокритериальных целевых функций.

Имитационная модель должна быть реализована на компьютере с использованием новейших достижений в области программного обеспечения. Ее назначение состоит в том, чтобы давать окончательную оценку рассматриваемым вариантам правил управления. Такая модель не обладает, как правило, достаточно большим быстродействием. Анализ большего числа вариантов режимов работы водохранилищ гидроузлов на этой модели связан со значительными затратами машинного времени, что приводит к необходимости создания упрощенных (менее подробных) моделей, позволяющих сократить время вычислений.

Упрощение имитационной модели приводит к *расчетной модели (оптимизационной модели)*, обладающей большим быстродействием. Ее назначение состоит в выработке вариантов правил управления, которые затем оцениваются на имитационной модели. Основные соотношения расчетной модели должны быть близки к соотношениям имитационной модели и в то же время достаточно упрощены, чтобы допускать практическую осуществимость применения итеративных методов оптимизации или поиск допустимого решения.

Наконец, наиболее простые, *аналитические модели* не требуют использования ЭВМ для анализа их свойств. Основные соотношения в этих моделях упрощены настолько, что возможно аналитическое решение. В результате исследования аналитических моделей определяется структура (вид) оптимальных правил управления, характер расчетной модели, начальное приближение и общие принципы перехода от одной итерации к другой. Именно аналитические модели и будут рассмотрены в данном параграфе.

Перейдем к описанию постановки и решения общей задачи управления динамической системой с ранжированным набором целей, функционирующей в условиях неопределенности, понимаемой в указанной выше смысле. При этом излагаются новые методы построения правил управления режимами работы водохранилищ, разработанные в ВЦ АН СССР под общим руководством академика АН СССР Н.Н. Моисеева.

При описании схемы решения рассматриваемых задач используется математические основы теории управления динамическими системами [Моисеев, 1981]. Основная цель заключается в обосновании возможности решения задачи рекомендованными методами.

Итак, пусть динамическая система описывается уравнением движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), t \in R^1, x \in R^n, u \in R^p, v \in R^q, \quad (2.2)$$

где t – время; x – фазовый вектор, характеризующий состояние системы (например, совокупность объемов наполнения или уровней воды водохранилищ); u – вектор управляющих воздействий (совокупность попусков); v – вектор неконтролируемых факторов (притоков воды); R^i – векторное пространство размерности i , где $i=1, n, p, q$. Функция f должна удовлетворять условиям, которые обеспечивают существование, единственность, неограниченное во времени продолжения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2) при постановке в правую часть произвольных реализаций управления $u(t)$ и неконтролируемого фактора $v(t)$ [Красовский, Субботин, 1974].

Управления u выбираются из некоторого компакта (замкнутого ограниченного множества) P (из множества допустимых совокупностей попусков). Неконтролируемые факторы v не могут выходить за пределы компакта Q (множества возможных совокупностей притоков воды в тот или иной интервал времени года). Предполагаем, что оперирующая сторона не располагает более точной информацией о v (прогнозом притоков воды). Однако она не имеет возможность в момент времени t наблюдать текущее фазовое состояние x и формировать управляющие воздействие на основе позиционной стратегии,

поскольку в рассматриваемой задаче нельзя ограничиться программными (не зависящими от наполнения водохранилищ) управлениями.

Позиционная стратегия представляет собой функцию $u(t, x)$, определенную на пространстве позиций $R^1 \times R^n$ со значениями во множестве P . В дальнейшем для обозначения функции $u(t, x)$ будем использовать символ U . Стратегия U , как правило, не может однозначно определить траекторию $x[t]$ системы (2.2) при заданном начальном условии $x[t_0] = x_0$. Множество траекторий при всевозможных реализациях неконтролируемого фактора v в пределах множества Q обозначим через $X_Q(t_0, x_0, U)$. Поскольку часто, в том числе и в задачах управления водохранилищами, используются разрывные функции $u(t, x)$, нужно определить, что мы понимаем под решением уравнения (2.2). Не останавливаясь на деталях, отметим, что под решением (2.2) понимается равномерный предел ломанных Эйлера, который будем называть движением*. Каждой ломанной Эйлера отвечает разбиение полуоси времени $[t_0, \infty)$ на систему интервалов конечной длины, причем на каждом интервале времени значение управления постоянно и совпадает с тем, которое было выбрано на левом конце данного интервала. При этом реализация неконтролируемых факторов $v(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) может быть любой, удовлетворяющей условию $v(t) \in Q$.

Предположим, что удовлетворительные в том или ином смысле позиции $\{t, x\}$ описываются некоторым множеством $N \subset R^{n+1}$. Известна начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ и задан период регулирования стока $t_0 \leq t < T$.

Задачей управления для начальной позиции $\{t_0, x_0\}$, отрезка времени $t_0 \leq t \leq T$, целевого множества N , множества управлений P , множества неопределенностей Q будем считать нахождение позиционной стратегии U , для которой любое движение $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\{t, x[t]\} \in N \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

Эта задача может быть разрешима, если только начальная позиция $\{t_0, x_0\}$, содержится в N , однако не обязательно, чтобы

* Применительно к задачам управления режимами работы водохранилищ, под ломанных Эйлера подразумевается граница соседних зон на диспетчерском графике с разными управляющими функциями.

задача была разрешима для любой начальной позиции $\{t_0, x_0\} \in N$. Обозначим через W множество всех $\{t_0, x_0\}$, для которых задача (2.3) разрешима. В дальнейшем множество N будем считать компактным. В этом случае множество $W \subset N$ также является компактным. Другой важной характеристикой множества W является стабильность. Основное свойство стабильности состоит в том, что для множества W существует такая экстремальная стратегия U^{extr} , для которой любое движение $x[t]$ из $X_Q(t_0, x_0, U^{extr})$ удовлетворяет условию $\{t, x[t]\} \in W$ при $t_0 < t \leq T$, если только начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ принадлежит W .

Поскольку $W \subset N$, стратегия U^{extr} решает задачу (2.3) для всех начальных позиций $\{t_0, x_0\}$ из W , т.е. для всех позиций, для которых эта задача в принципе разрешима. Поэтому W называют максимально стабильным множеством для задачи (2.3).

Экстремальная стратегия U^{extr} , строится по множеству W : в позиции $\{t, x\}$ обеспечивается выполнение следующего условия:

$$\min_{v \in Q} \langle w - x, f(t, x, u^{extr}(t, x), v) \rangle = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle w - x, f(t, x, u, v) \rangle, \quad (2.4)$$

где w — одна из ближайших к x точек сечения $W(t)$ множества W в момент t , т.е.

$$W(t) = \{w | \{t, w\} \in W\}.$$

Отметим, что если при некотором $t=t_*$ множества $W(t_*)$ является пустым, т.е. не содержащим элементов, то управление $u^{extr}(t_*, x)$ не определено. Если же $\{t_*, x_*\} \in W$, т.е. $x_* \in W(t_*)$, то условие (2.4) удовлетворяет любое $u^{extr}(t_*, x_*) \in P$, так как w_* совпадает с x_* . Таким образом, внутри множества W у оперирующей стороны остается полная свобода выбора управления. Этим обстоятельством можно воспользоваться в задаче управления с несколькими целями, ранжированными в порядке их важности.

Ранжированным набором целей для системы (2.2) назовем совокупность целевых множеств $N_1, N_2, \dots, N_l$ и совокупность множества неопределенностей $Q_1, Q_2, \dots, Q_l$ таких, что $Q \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_l$ и $N_{i+1} \subset W_i$ ($i=0, \dots, l-1$), где W_i — максимальное стабильное множество для задачи (2.3) при $N=N_i$ и $Q=Q_i$.

Суть ранжировки целей состоит в том, что она позволяет каждую последующую цель формулировать лишь для тех позиций, для которых может быть реализована предыдущая.

Стратегию $U^0 = u^0(t, x)$ для системы с ранжированным набором целей предлагается строить следующим образом:

$$u^0(t, x) = u^i(t, x) \quad \text{при} \quad \{t, x\} \in W_{i-1} | w_i,$$

где $u^i(t, x)$ - экстремальная стратегия для W_i . Будем считать, что $W_0 = R^{n+1}$ и множество W_{i+1} , которое является подмножеством W_i , входит в последнее с некоторой своей окрестностью.

Для стратегии U^0 характерно свойство, заключающееся в том, что в случае ее применения траектория системы (2.2) не выйдет за пределы узкого целевого множества $W_l \subset N_l$, если только неопределенный фактор v не выйдет за пределы множества Q_l . При этом предполагается, что начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ содержится в W_l .

Если же указанный выход будет иметь место (реализация $v(t)$ за пределами Q_l), стратегия U^0 автоматически переключается на то, чтобы траектория находилась внутри множества $W_{l-1} \subset N_{l-1}$, и т.д. Благодаря отмеченному свойству позиционная U^0 решает задачу управления системой в условиях неопределенности при ранжированном наборе целей.

Заметим, что до сих пор рассматривались такие цели управления, которые можно сформулировать в терминах принадлежности пары $\{t, x\}$ некоторому множеству позиций N . В более общей постановке задачи могут налагаться требования на тройку $\{t, x, u\}$. Перейдем к рассмотрению работы одного гидроузла с водохранилищем и на этом примере покажем, как реализуется описанная схема в случае, когда некоторые цели управления формулируются с помощью тройки $\{t, x, u\}$.

Моделирование одного гидроузла с водохранилищем. В качестве фазовой переменной будем рассматривать объем воды в водохранилище. Динамику воды в водохранилище описывается балансовым уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v(t) - u(t), \tag{2.5}$$

где t - время; $x(t)$ - объем воды в водохранилище в момент t ; $v(t)$ - приток воды в момент t ; $u(t)$ - попуск воды из водохранилища в момент t .

Управлением является попуск воды u , удовлетворяющей ограничению

$$0 \leq u^- \leq u \leq u^+, \quad (2.6)$$

где u^+ - максимальная пропускная способность гидроузла; u^- - обязательный минимальный попуск воды в нижний бьеф.

Рассматриваем только такие управления, при которых объем наполнения водохранилищ, остается в заданных пределах:

$$x^- \leq x \leq x^+, \quad (2.7)$$

где x^+ - объем воды в водохранилище, соответствующей нормальному подпорному уровню (НПУ); x^- - объем воды, соответствующей уровню мертвого объема (УМО) водохранилища.

Дискретный вариант модели получается при замене ограничений (2.6), (2.7) и уравнения (2.5) их дискретными аналогами. Динамика воды в водохранилище описывается в этом случае уравнением

$$x(t+1) - x(t) = v(t) - u(t), \quad (2.8)$$

где $x(t)$ - объем воды в водохранилище на начало периода t ; $v(t)$ - объем воды, притекающий за период t ; $u(t)$ - объем попуска воды за период t .

Рассмотрим несколько вариантов информированности оперирующей стороны о притоке воды в водохранилище гидроузла.

- Приток $v(t)$ задан в детерминированном виде;
- Множество возможных притоков Q^* включает конечное число (k) функции, определенных на отрезке $[0, T]$:

$$Q^* = \{v_i(t) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

- Множество возможных притоков Q^* описывается с помощью верхней ($v^+(t)$) и нижней ($v^-(t)$) огибающей:

$$Q^* = \{v(t) \mid v^-(t) \leq v(t) \leq v^+(t)\}$$

При выборе управления водохранилищем имеется возможность учитывать текущее значение фазовой переменной x , т.е. текущее значение объема воды в водохранилище. Поэтому, как указывалось выше, разумным является использование позиционных стратегий $u(t, x)$. Обозначим через P^* . Всякая D – стратегия определяется диспетчерским графиком D . Диспетчерским графиком назовем совокупность

$$D = \left\{ \{f_i\}_{i=1}^m, \{\varphi\}_{i=1}^{m+1} \right\}$$

состоящую из m непрерывных функций $f_i(t)$ и $m+1$ непрерывных функций $\varphi_i(t, x)$, удовлетворяющих условиям

$$x^+ \geq f_1(t) \geq f_2(t) \geq \dots \geq f_m(t) \geq x^-;$$

$$u^+ \geq \varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x), \dots, \varphi_{m+1}(t, x) \geq u^-.$$

при всех $t \in [0, T]$.

Диспетчерский график D определяют D – стратегию:

$$u_D(t, x) = \varphi_i(t, x), \text{ если } f_{i-1}(t) > x > f_i(t).$$

Отметим, что управления, применяемые в водохозяйственной практике, построены так же, как и D – стратегии, причем число зон m в них, как правило, невелико (3-5), а функции φ_i , обычно является константами [Крицкий С.Н., Менкель, 1952]

Управление водохранилищем, должно обеспечивать выполнения ряда требований, ранжированных в порядке важности. Заметим, что если между целями не возникает противоречия, то при решении задачи их можно поставить в любом порядке. Ранжировка целей требуется для решения задачи в условиях, когда выполнение всех целей невозможно.

Ниже рассматриваются решения задачи по управлению режимами работы водохранилища при трех целях:

- *обеспечении непревышения отметок НПУ при пропуске экстремального и многоводных половодий;*
- *выдаче гарантированной отдачи (по пускам воды или по мощности);*
- *получении максимальной выработки энергии на ГЭС (в упрощенном варианте – обеспечение отсутствия холостых сбросов воды через гидроузлы).*

Задача о пропуске экстремного и многоводных половодий.

Требуется построить такое управление $u \in P^*$, чтобы соответствующая ему траектория, исходящая из начальной позиции x_0 , не превышала значения x^+ всех $t \in [0, T]$ при любой реализации притока воды v из множества Q^* . Математическая формализация данной модели, выглядит так:

При условиях $\dot{x} = v - u$, $x \geq x^-$, $x(0) = x_0$ требуется найти функцию

$$\mathfrak{T}_1(x_0) = \max_{u \in P^*} \min_{v \in Q^*} \int_0^T \phi_1(t, x, u, v) dt,$$

где

$$\phi_1(t, x, u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq x^+; \\ 0, & \text{если } x > x^+. \end{cases}$$

Функция ϕ_1 зависит от многих переменных, однако в данной задаче все аргументы, кроме начального наполнения x_0 , фиксированы.

Выполнение равенства $\phi_1(x_0) = T$ означает, что для данной начальной позиции x_0 разрешима задача о пропуске половодья, т.е. существует такое управление $u(t, x)$, при котором не произойдет превышения максимально допустимого объема (уровня) воды в водохранилище при любой реализации притока v из множества Q^* . Более того, оказывается, что существует универсальная стратегия $u^e(t, x)$, которая решает эту задачу для всех начальных позиций x_0 , для которых эта задача в принципе разрешима.

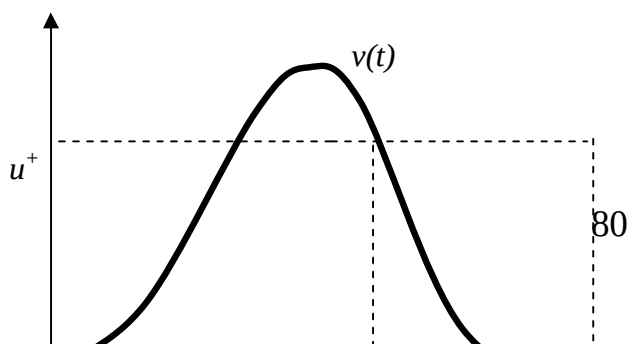
Легко описать множество универсальных стратегий (обозначим его через P^{**}). Существует такая линия $x^{\delta}(t)$ которую будем называть линией безопасности, что любая стратегия $u(t, x)$ из множества P^{**} удовлетворяет условию

$$u(t, x) = u^+ \quad \text{при} \quad x^{\delta}(t) \leq x \leq x^+ \quad (2.9)$$

Зону между линией $x^{\delta}(t)$ и x^+ назовем *зоной безопасности*. Ниже этой зоны управление может быть произвольным по отношению к цели данной задачи.

Приведем решение задачи о пропуске половодий для всех вариантов информированности о притоке воды, т.е. укажем формулу для вычисления линий $x^{\delta}(t)$.

Итак, пусть расчетный приток воды $v(t)$ известен. Характерный график $v(t)$ изображен на рис. 8.



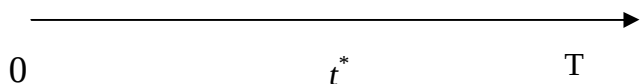


Рис. 8. Характерный график притока воды в водохранилище $v(t)$, используемый при решении задачи о пропуске экстремного и многоводных половодий.

Важно, что функция $v(t)$ превосходит уровень u^+ только на одном отрезке, лежащем внутри $[0, T]$. Характерной точкой является правый конец t^* этого отрезка. В указанный момент объем наполнения водохранилища может быть максимальным. Обозначим через $x^+(t)$ решение дифференциального уравнения $\dot{x} = v - u^+$ с граничным условием $x(t^*) = x^+$. Линия $x^+(t)$ имеет следующий смысл: *при попадании в любую точку над этой линией невозможно избежать превышения максимально допустимого уровня воды в водохранилище.*

Таким образом, задачу о пропуске половодий для одной реализации притока воды в водохранилище решает D – стратегия $u(t, x)$, удовлетворяющая условию (2.9), где $x^{\bar{o}}(t)$ определяется по формуле

$$x^{\bar{o}}(t) = \min(x^+, x^+(t)) \quad (2.10)$$

Пусть теперь множество Q^* состоит из k притоков, графики которых подобны графику, изображенному на рис. 2.1. В этом случае линия безопасности $x^{\bar{o}}(t)$ удовлетворяет условию

$$x^{\bar{o}}(t) = \min_{1 \leq i \leq k} x_i^{\bar{o}}(t) \quad (2.11)$$

где $x_i^{\bar{o}}(t)$ – линия безопасности для притока $v_i(t)$. Линия безопасности для конечного набора расчетных притоков является нижней огибающей линий безопасности, построенных для каждого притока в отдельности. При этом множество управлений, решающих задачу с k притоками, является пересечением множества управлений, решающих задачу при каждом из этих k притоков.

Линию безопасности $x^{\bar{o}}(t)$ можно определить также по формуле

$$x^{\bar{o}}(t) = x^+ + \min_{\substack{\tau \geq t \\ 1 \leq i \leq k}} \left[u^+(\tau - t) - \int_t^{\tau} v_i(\xi) d\xi \right] \quad (2.12)$$

С вычислительной точки зрения формула (2.12) сложнее чем формула (2.11), однако далее, при рассмотрении каскада водохранилищ, понадобятся формулы именно такого типа. Легко проверить, что формулы (2.11) и (2.12) задают одну и ту же линию.

Для случая $Q^* = \{v(t) | v^-(t) \leq v(t) \leq v^+(t)\}$ задача о пропуске половодий может быть записана с помощью целевого множества $N = \{0 \leq t \leq T, x \leq x^+\}$. Построим максимальное стабильное множество W . Множество позиций $\{t, x\}$, для которых эта задача может быть решена, имеет вид $\{t, x | x \leq x^{\bar{o}}(t), 0 \leq t \leq T\}$, где функция $x^{\bar{o}}(t)$ может быть найдена из следующих соображений. При условии $x^{\bar{o}}(t) < x^+$ должно быть выполнено равенство $\dot{x}^{\bar{o}}(t) = v^+(t) - u^+$. В самом деле, если $x^{\bar{o}}(t) < v^+(t) - u^+$, то это противоречит свойству стабильности, а обратное неравенство противоречит максимальнойности множества W . При $x^{\bar{o}}(t) = x^+$ получается $\dot{x}^{\bar{o}}(t) = \max[0, v^+(t) - u^+]$.

Таким образом, линия $x^{\bar{o}}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = \Re(t, x)$$

где

$$\Re(t, x) = \begin{cases} v^+(t) - u^+ & \text{если } x < x^+ \\ \max[0, v^+(t) - u^+] & \text{если } x = x^+ \end{cases}$$

и граничному условию $x(T) = x^+$, или $x(T) = x_T$, если правый конец траектории фиксирован. Если верхняя огибающая притоков воды $v^+(t)$ имеет такой же вид, как и характерный расчетный приток, изображенный на рис. 2.1, то линию $x^{\bar{o}}(t)$ можно определить и по формуле (2.10), положив $v = v^+$.

По аналогии со случаем детерминированного притока обозначим через $x^+(t)$ часть линии безопасности, которая лежит ниже x^+ . Отметим разницу в построении кривых $x^+(t)$ для двух последних задач. Для задачи с конечным набором притоков эта

линия не является траекторией уравнения (2.5), она определяется как нижняя огибающая соответствующих траекторий $x_i^+(t)$, а для последней задачи линия $x^+(t)$ сама является траекторией уравнения $\dot{x} = v^+ - u^+$. Поэтому в первом случае линия $x^+(t)$ является “проницаемой” границей, т.е. можно попасть в зону над этой линией, избежав при этом превышения максимально допустимого уровня воды в водохранилище. Во втором случае эта линия является границей стабильного множества. Никакая траектория уравнения не может подняться выше этой линии, если $u(t, x) = u^+$ при $x > x^b(t)$. Для конечного множества притоков воды можно тоже построить верхнюю огибающую $v^+(t) = \max_{1 \leq i \leq k} v_i(t)$, а затем линию безопасности, соответствующую $v^+(t)$. Эта линия будет уже “непроницаемой” границей. Легко показать, что она пройдет ниже линии $x^b(t)$, определяемой по формуле (2.11), а значит, зона свободного управления окажется необоснованно ограниченной.

Задача о выдаче гарантированной отдачи гидроузла. Воспользуемся свободой управления ниже линии безопасности для реализации следующей цели, которая состоит в выдаче гарантированной отдачи. Рассмотрим две разновидности гарантированной отдачи: гарантированный попуск воды и гарантированную мощность ГЭС.

По форме задача о гарантированном попуске аналогична задаче о пропуске половодий. Целевая функция в этом случае имеет вид

$$\phi_2(t, x, u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \geq u^*(t); \\ 0 & \text{если } u < u^*(t). \end{cases}$$

где $u^*(t)$ - требуемый режим попуска.

Отметим, что в этой задаче допустимыми являются управления, которые не противоречат управлению по условию попуска половодий.

Будем говорить, что задача о гарантированном попуске разрешима для некоторого множества неопределенности Q^{**} и начального наполнения водохранилища x_0 , если выполнено условие:

$$\mathfrak{I}_2(x_0) = T, \tag{2.13}$$

$$\text{где } \mathfrak{I}_2(x_0) = \max_{u \in P_1} \min_{v \in Q^{**}} \int_0^T \phi_2(t, x, u, v) dt.$$

Условие (2.13) означает, что среди управлений, решающих задачу о пропуске половодий, найдется такое управление, при котором можно в течение всего периода T выдержать попуск $u^*(t)$ при начальном запасе воды x_0 и при любой реализации притока v из множества Q^{**} .

Для построения множества Q^{**} сначала проверим, разрешима ли задача о гарантированном попуске при $Q^{**} = Q^*$. Если условие (2.13) выполнено, то попуск u^* можно назначить бесперебойно для любого притока из множества Q^* . В противном случае есть два выхода.

Первый состоит в рассмотрении задачи о сниженном гарантированном попуске. Сниженным гарантированным попуском назовем функцию $\{\lambda^* \cdot u^*(t), \lambda^* \in (0,1)\}$, где λ^* - максимальное число из интервала $(0,1)$, для которого разрешима задача о гарантированном попуске $\{\lambda \cdot u^*(t)\}$ для $Q^{**} = Q^*$.

Второй путь состоит в нахождении максимального подмножества Q^{**} из множества притоков Q^* , для которого еще разрешима задача о гарантированном попуске $u^*(t)$. Это множество описывается

следующим образом:

$$Q^{**} = \{v \in Q^* \mid \text{найдется } u \in P^* : \phi_2(t, x, u, v) = 1 \text{ для всех } t \in [0, T] \text{ при } x(0) = x_0\}$$

Обеспеченность пуска u^* для множества притоков Q^* (при втором типе информированности о притоке) равна отношению числа притоков в Q^{**} к числу притоков Q^* . Любая стратегия $u(t, x)$ из множества P^{**} решений задачи о гарантированном попуске удовлетворяет условию $u(t, x) = u^*(t)$ при $x^- \leq x \leq x''(t)$. Линия $x''(t)$ является верхней границей зоны гарантированной отдачи, ниже которой необходимо назначить попуск $u^*(t)$. В зоне между линиями $x''(t)$ и $x^{\bar{0}}(t)$ - так называемой зоне избытков - управление может быть произвольным по отношению к рассмотренным целям.

Задача о гарантированной отдаче принципиально решается так же, как и задача о пропуске половодий, только она имеет противоположную ориентацию по цели.

Линия гарантированной отдачи $x''(t)$ для случая одного притока воды в водохранилище получается как решения уравнения

$$\dot{x} = \begin{cases} v - u^*, & \text{если } x > x^-; \\ \min(0, v - u^*), & \text{если } x = x^-. \end{cases} \quad (2.14)$$

с граничным условием $x(T) = x^-$.

Гарантированную отдачу u^* можно обеспечить при начальном запасе воды $x_0 \geq x''(0)$. Для конечного набора притоков линия $x''(t)$ строится как верхняя огибающая линий, построенных для каждого притока в отдельности.

Для случая третьего типа информированности о притоке воды ($Q^* = \{v(t) | v^-(t) \leq v(t) \leq v^+(t)\}$) при построении линии $x''(t)$ нужно решить дифференциальное уравнение (2.14), поставив вместо v нижнюю огибающую $v^-(t)$ с теми же граничными условиями, а именно:

$$\dot{x} = \begin{cases} v^-(t) - u^*, & \text{если } x > x^-; \\ \min(0, v^-(t) - u^*), & \text{если } x = x^-. \end{cases}$$

с граничным условием $x(T) = x^-$.

Задача об управлении гидроузлом в зоне избытков воды. Третьей по важности целью в нашей модели является максимизация выработки электроэнергии. Возможно несколько подходов к решению этой задачи.

Во-первых, можно так организовать управление, чтобы уменьшить по возможности холостые сбросы воды, которые возникают, когда попуск u превышает максимальную пропускную способность турбин u^{max} . Целевая функция в этом случае имеет вид

$$\phi_3(t, x, u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \leq u^{max}; \\ 0 & \text{если } u > u^{max}, \end{cases}$$

а множество притоков Q^{**} совпадает с Q^* .

Эта задача решается аналогично задаче о безопасности гидроузла. Линия холостых сбросов $x^3(t)$ получается во всех случаях информированности о притоке по тем же формулам, что и линия безопасности, нужно только везде поменять u^+ на u^{max} . Как и раньше, существует такая универсальная стратегия $u^e(t, x)$, которая решает задачу о минимизации холостых сбросов сразу для всех начальных позиций. Любая такая стратегия удовлетворяет условию $u(t, x) = u^{max}$ при $x^3(t) \leq x < x^6(t)$. В зоне между линиями $x''(t)$ и $x^3(t)$ управление может быть произвольным по отношению к рассмотренным целям.

Таким образом, реализация каждой следующей цели добавляла к диспетчерскому графику, полученному на предыдущем шаге,

одну линию и определяла управление в зоне, расположенной над ней или под ней. Можно было бы по этому пути идти дальше и использовать зону управления между линиями $x^H(t)$ и $x^9(t)$ для достижения необходимых целей.

Другой подход к решению задачи о максимизации выработки энергии на ГЭС состоит в том, чтобы в качестве критерия рассматривать непосредственно выработку энергии и максимизировать ее в зоне избытков. В простейшем случае (при допущении линейности связи уровней и объемов воды в водохранилище, независимости уровня воды в нижнем бьефе от ппуска и независимости КПД турбин от напора и расхода воды) мощность ГЭС может быть выражена формулой, $C_1 \cdot u(C_2 \cdot x - C_3)$, где C_1, C_2, C_3 – постоянные коэффициенты, x – объем воды в водохранилище, u – управление (расход воды через турбины). Сделав замену переменных, формулу для мощности можно привести к виду $x \cdot u$. В этом случае целевая функция может быть выражена следующим образом:

$$\tilde{\phi}_3(t, x, u, v) = x \cdot u.$$

При такой целевой функции не учитывается ограничение по максимальной пропускной способности турбин ГЭС $u^{\max}$. Его можно учесть, изменив выражение для целевой функции:

$$\hat{\phi}_3(t, x, u, v) = x \cdot \min[u, u^{\max}].$$

Целевая функция $\tilde{\phi}_3$ и $\hat{\phi}_3$ принципиально отличаются от предыдущих рассмотренных нами функций. Все ранее рассмотренные целевые функции имели качественный характер. Они могли принимать только два значения: 1 в случае успеха и 0 в противном случае. Функции же $\tilde{\phi}_3$ и $\hat{\phi}_3$ являются количественными. Поэтому и решение задачи с этими функциями отличаются от решения предыдущих задач. Отличие состоит в том, что в этих задачах не остается никакой свободы в выборе управления. Рассмотрим решение двух конкретных задач с целевыми функциями $\tilde{\phi}_3$ и $\hat{\phi}_3$.

Сначала будем рассматривать две цели: *пропуск многоводных половодий и максимизацию выработки электроэнергии*. Эта ситуация может появиться в энергосистемах, где ГЭС не участвуют в снятии пиков графиков нагрузки, а предназначены только для выработки электроэнергии. Такая ситуация имела место, например, в энергосистеме Сибири в первые годы эксплуатации Братской

ГЭС. В настоящее время, такая ситуация имела место в энергосистеме Кыргызской Республики, когда Токтогульский гидроузел был переведен в энергетический режим. Указанные задачи можно решать последовательно, как было описано выше, а можно сразу сформулировать одну задачу оптимального управления с ограничением $x^- \leq x \leq x^+$ и функционалом $\int_0^T N(x, u) dt$,

где $N(x, u)$ - функция мощности ГЭС. Иногда в задачах годового регулирования стока требуется в конце периода прийти в ту же точку, из которой было начато управление, например от НПУ в конце паводка одного года до НПУ в конце паводка следующего года, т.е. $x(0) = x(T) = x_0$. Будем считать, что притоки выбираются из множества

$$Q^* = \{v(t) | v^-(t) \leq v(t) \leq v^+(t)\}$$

Итак, рассматривается следующая задача:
Требуется,

$$\max_{u \in P^*} \min_{v \in Q^*} \int_0^T x u dt, \quad (2.15)$$

при выполнении следующих условий:

$$\dot{x} = v - u; \quad u^- \leq u \leq u^+; \quad x^- \leq x \leq x^+; \quad x(0) = x(T) = x_0.$$

Обозначим $\tilde{x}^+(t)$ - верхнюю границу области допустимости для верхней огибающей множества Q^* , $\tilde{x}^-(t)$ - нижнюю границу для нижней огибающей. Задача (2.15) будет разрешимой тогда и только тогда, когда $\tilde{x}^-(t) \leq \tilde{x}^+(t)$ для всех $t \in [0, T]$ и $\tilde{x}^-(0) \leq x_0 \leq \tilde{x}^+(0)$. Линия $\tilde{x}^+(t)$ в данной задаче является линией безопасности. Оптимальное управление в задаче пропуска половодий предписывает применять выше этой линии управление u^+ , ниже этой линии может быть выбрано произвольное управление. Максимизация выработки электроэнергии полностью определяет это управление, т.е. требует назначения попуска u^- ниже линии $\tilde{x}^+(t)$. Оптимальная позиционная стратегия в задаче (2.15) изображена на рис.9.

Оказывается, что верхнее ограничение на объем “более существенно”, чем нижнее, так как оптимальная позиционная

стратегия (в случае допустимости) не зависит от нижнего ограничения.

Отметим, что оптимальная позиционная стратегия останется такой же, если вместо того чтобы брать минимум по множеству Q^* , считать, что на нем задано некоторое вероятностное распределение.

Рассмотрим теперь задачу, которая учитывает максимальную пропускную способность турбин ГЭС. Будем считать, что вклад в функционал дает только попуск через турбины, т.е. попуск, не превышающий u^{max} . Тогда вместо функции xu появится функция, $x \cdot \min(u, u^{max})$ и задача для известного притока запишется следующим образом:

$$\max_{u \in P^*} \int_0^T x \cdot \min(u, u^{max}) dt$$

для условий $\dot{x} = v - u$; $u^- \leq u \leq u^+$; $x^- \leq x \leq x^+$; $x(0) = x(T) = x_0$.

Оптимальный диспетчерский график имеет две характерные линии: линию безопасности $x^s(t)$ и линию $\hat{x}^s(t)$, которая разграничивает области с управлением u^- и u^+ (Рис.10).

Если максимизацию энергии заменить минимизацией холостых сбросов, то линия $\hat{x}^s(t)$ заменится линией холостых сбросов $x^s(t)$, ниже которой управление может быть произвольным, а выше - u^{max} .

Напоминаем, что вне горизонтальных участков линия безопасности удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{x} = v - u^+$, линия холостых сбросов $x^s(t)$ - $\dot{x} = v - u^{max}$. Линия $\hat{x}^s(t)$ там где, она не совпадает с $x^s(t)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = \frac{u^{max}}{u^+} \cdot (v - u^+).$$

В заключении этого параграфа рассмотрим модельной задачи, в котором присутствуют сразу все три цели: *пропуск многоводных половодий, гарантированная мощность и максимизация выработки энергии в пределах зоны избытков*. Предположим для простоты, что требуемая гарантированная мощность N^{gar} не зависит от времени.

Математическая формулировка этой модельной задачи выглядит следующим образом:

Требуется

$$\max_{u \in P^*} \min_{v \in Q^*} \int_0^T x \cdot u dt$$

при выполнении следующих условий:

$$\dot{x} = v - u; \quad u^- \leq u \leq u^+; \quad x^- \leq x \leq x^+; \quad x \cdot u \geq N^{gar}; \quad x(0) = x(T) = x_0.$$

Решение этой модельной задачи без учета гарантированной мощности уже было приведено. При принятых допущениях о кривых связи нижнего и верхнего бьефов оно состоит в том, чтобы поддерживать максимальный допустимый объем водохранилища. Ограничение по гарантированной мощности, которое можно записать как $u \geq \frac{N^{gar}}{x}$, изменяет нижнюю границу для u некоторых состояниях, поэтому оптимальная позиционная стратегия в этом случае имеет вид

$$u^o(t, x) = \max[u(t, x), \frac{N^{gar}}{x}],$$

где $u(t, x)$ - оптимальная позиционная стратегия для модельной задачи без учета гарантированной мощности (рис. 2.4).

Управление режимом работы каскада водохранилищ. Для некоторого каскада водохранилищ построим ориентированный граф, вершины которого соответствуют водохранилища, а стрелки показывают направление движения воды. По графу G построим матрицу A с элементами

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при наличии дуги } (i, j) \text{ в графе } G \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Динамику движения воды в каскаде будем задавать с помощью балансового уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v - C \cdot u,$$

где $C = B - A$, а B - единичная матрица.

Здесь t - время; v - вектор боковой приточности; u - вектор попусков; x - вектор объемов воды в водохранилищах в момент t ; C - матрица из элементов 0, 1, -1, определяемая структурой связи водохранилищ по формуле $B - A$. Матрица C не вырождена, и обратная матрица C^{-1} легко описывается в явной форме. Элементы $\tilde{c}_{ij}$ матрицы C^{-1} определяется следующим образом:

$$\tilde{c}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если на графе } G \text{ существует путь из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю;} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Рассмотрим модельную задачу, в которой целью управления является удержание вектора x в пределах $[x^-; x^+]$ при условии, что $0 \leq t \leq T$, $u^- \leq u \leq u^+$ и $v \in Q(t)$, где $Q(t)$ - некоторый многогранник.

В этом случае целевое множество есть $N = \{t, x | 0 \leq t \leq T, x^- \leq x \leq x^+\}$. Сечение этого множества обозначим через $M = \{x | x^- \leq x \leq x^+\}$. Поставленную модельную задачу можно решить с помощью методов теории дифференциальных игр.

Решение осуществляется в два этапа. На первом этапе удастся определить в явном виде геометрическую структуру соответствующего максимально стабильного множества, т.е. совокупность всех x , начиная с которых в момент t разрешима задача по обеспечению нахождения внутри множества N на оставшийся период времени $[t, T]$.

Каждое сечение искомого множества есть многогранник вида $H \cdot x \leq h(t)$. Наиболее существенное отличие задачи в случае каскада водохранилищ от модельной задачи с одним водохранилищем состоит в том, что если взять пересечение множеств, составляющих решение задачи для каждого отдельного притока, считая его известным, то получится множество позиций $\{t, x\}$, которое не является стабильным. Однако, это множество можно взять в качестве целевого и повторить аналогичные построения. Этот итерационный процесс для данного случая сходится за конечное число итерации и дает решения задачи [Субботин А.И., Ченцов А.Г., 1981].

На втором этапе вводятся дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет функция $h(t)$. Они могут быть численно проинтегрированы в обратном времени, начиная с момента $t=T$. После построения стабильного множества несложно вычислить

экстремальную для него стратегию U^{extr} , которая и является решением задачи управления.

Для случая каскада из двух водохранилищ множество $W(t)$, представляющее собой сечение максимально стабильного множества W в момент t , является шестиугольником с точностью до вырождения отдельных его сторон (рис. 12).

Совместное управление режимами работы водохранилищ является функцией от наполнения обоих водохранилищ.

Метод построения правил управления каскадом водохранилищ. Рассмотрим дискретную модель управления каскадом из двух водохранилищ. Предположим, что приток выбирается из некоторого конечного набора. Для каждого водохранилища будем требовать выполнение следующих целей: *пропуска многоводных половодий, выдачи гарантированного попуска, минимизации холостых сбросов воды*. На диспетчерском графике первого водохранилища будут соответственно три линии: $x_1^{\delta}(t)$, $x_1^{\circ}(t)$, $x_1^{\eta}(t)$ и свобода в управлении между линиями $x_1^{\eta}(t)$ и $x_1^{\circ}(t)$ (индекс внизу указывает номер водохранилища, второй индекс, если он имеется, - номер реализации притока). Используем эту свободу для решения модельной задачи о пропуске многоводных половодий второго гидроузла. Линия безопасности в этом случае будет уже зависеть от управления первым водохранилищем [см. (2.12)].

$$x_2^{\delta}(t) = x_2^+ + \min_{\substack{\tau \geq t \\ 1 \leq i \leq k}} [u_2^+(\tau - t) - \sum_{s=t+1}^{\tau} v_{2i}(s) - \sum_{s=t+1}^{\tau} u_1(s)], \quad (2.16)$$

где

$$u_1(s) = \begin{cases} u_1^* & \text{если } x_1 < x_1^{\circ}(t) \\ \hat{u}_1 & \text{если } x_1^{\circ}(t) \leq x_1 < x_1^{\delta}(t) \\ u_1^+ & \text{если } x_1^{\delta}(t) \leq x_1 \end{cases} \quad (2.17)$$

При превышении объема воды во втором водохранилище значения $x_2^{\delta}(t)$ попуск из него принимается равным u_2^+ , чем и обеспечивается пропуск половодья на втором гидроузле. Заметим, что в критической ситуации (при достижении объема $x_2^{\delta}(t)$) первое водохранилище в зоне нерегламентированного управления работает с попуском u_1^* . Значение $x_2^{\delta}(t)$ оказывается зависимым от значения объема $x_1(t)$, т.е. $x_2^{\delta}(t) = \varphi(t, x_1(t))$.

После рассмотренной модельной задачи решается модельная задача обеспечения гарантированного попуска воды $u_2^*(t)$. Аналогично предыдущему решением служит такое значение объема $x_2''(t)$, что если $x_2(t) \leq x_2''(t)$, то нужно переходить на попуск $u_2^*(t)$:

$$x_2'' = x_2^- + \max_{\substack{\tau \geq t \\ 1 \leq i \leq k}} \left[\sum_{s=t+1}^{\tau} u_2^*(s) - \sum_{s=t+1}^{\tau} v_{2i}(s) - \sum_{s=t+1}^{\tau} u_1(s) \right],$$

где

$$u_1(s) = \begin{cases} u_1^* & \text{если } x_1 < x_1''(t) \\ \hat{u}_1 & \text{если } x_1''(t) \leq x_1 < x_1^{\hat{o}}(t) \\ u_1^+ & \text{если } x_1^{\hat{o}}(t) \leq x_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Значение $x_2''(t)$ второго водохранилища для каждого t также определяется значением $x_1(t)$ первого водохранилища. Если задача неразрешима с помощью формул (2.18), следует заменить в (2.18) $\hat{u}_1$ на u_1^+ , что, очевидно, приведет к понижению уровня $x_2''(t)$ и поэтому, возможно, к существованию решения. Эта замена связана с большей важностью задачи обеспечения гарантированных попусков воды в нижнем бьефе второго водохранилища, чем задача увеличения выработки энергии на ГЭС первого гидроузла.

Переход к задаче минимизации холостых сбросов осуществляется заменой в формуле (2.16) u_2^+ на $\hat{u}_2$, при этом получаем соотношение, определяющее критический объем $x_2^3(t)$, при превышении которого нужно переходить на попуск $\hat{u}_2$. В зоне нерегламентированного управления для первого водохранилища выбирается попуск u_1^* , что связано с необходимостью облегчить решения модельной задачи минимизации холостых сбросов для второго водохранилища.

Таким образом, пространство $[x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+] \cdot H$ (где $H = \{1, 2, \dots, T\}$) разбивается линиями $x_2''(t) \leq x_2^3(t) \leq x_2^{\hat{o}}(t)$ на четыре области, в каждой из которых, кроме области, расположенной между $x_2''(t)$ и $x_2^3(t)$, однозначно предписан попуск, который нужно осуществлять.

Переход к случаю каскада из трех и более гидроузлов с водохранилищами осуществляется аналогично. При этом следует только иметь в виду, что линии $x_i^{\hat{o}}(t)$, $x_i^3(t)$, $x_i''(t)$ для $i \geq 3$ зависят в

момент времени t от объемов наполнения всех водохранилищ, лежащих выше по течению реки. Эти линии вместе с назначаемыми пусками $u_i^+, \hat{u}_i$ и u_i^* в соответствующих зонах и задают правила управления каскадом.

Расчет режима работы каскадов в соответствии с предложенными правилами проводится последовательно для гидроузлов сверху вниз по течению реки.

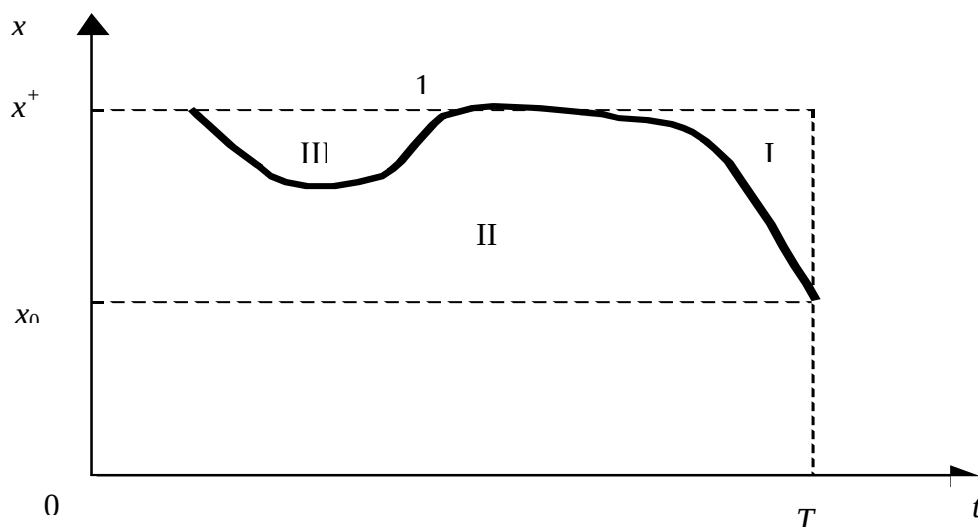


Рис.9.Оптимальная позиционная стратегия для модельной задачи пропуска многоводных половодий и максимизация выработки энергии от ГЭС с учетом максимальной пропускной способности турбин: *I* – зона безопасности ($u=u^+$); *II* – зона избытков ($u=u^-$); 1 – линия безопасности $x^{\bar{o}}(t)$.

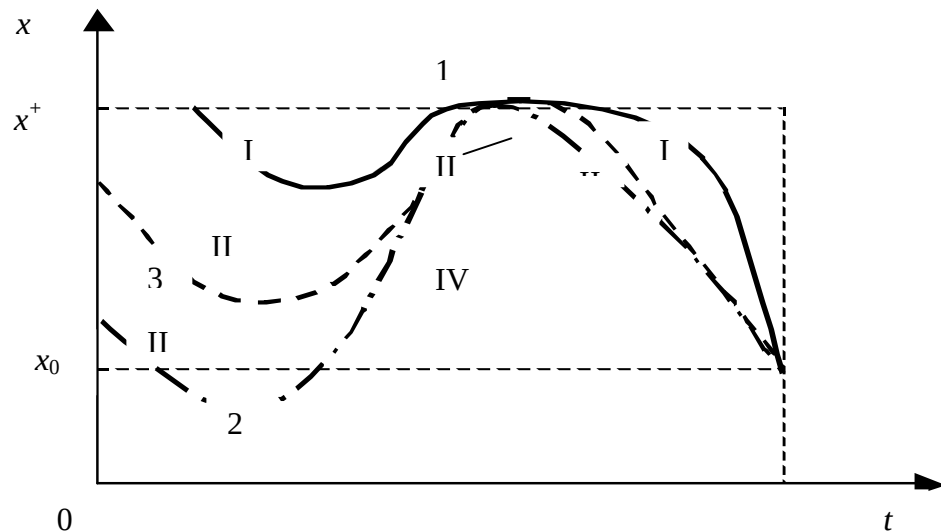


Рис. 10. Оптимальная позиционная стратегия для модельной задачи пропуска многоводных половодий и максимизация выработки энергии от ГЭС с учетом максимальной пропускной способности турбин:

1 – линия безопасности $x^{\delta}(t)$; 2 – линия холостых сбросов $x^{\emptyset}(t)$; 3 – граница между зонами II и III; I – зона безопасности ($u=u^{+}$); II – зона максимального пропуска воды через турбину ($u=\hat{u}$); III, IV – зона гарантированного пропуска воды ($u=u^{-}$).

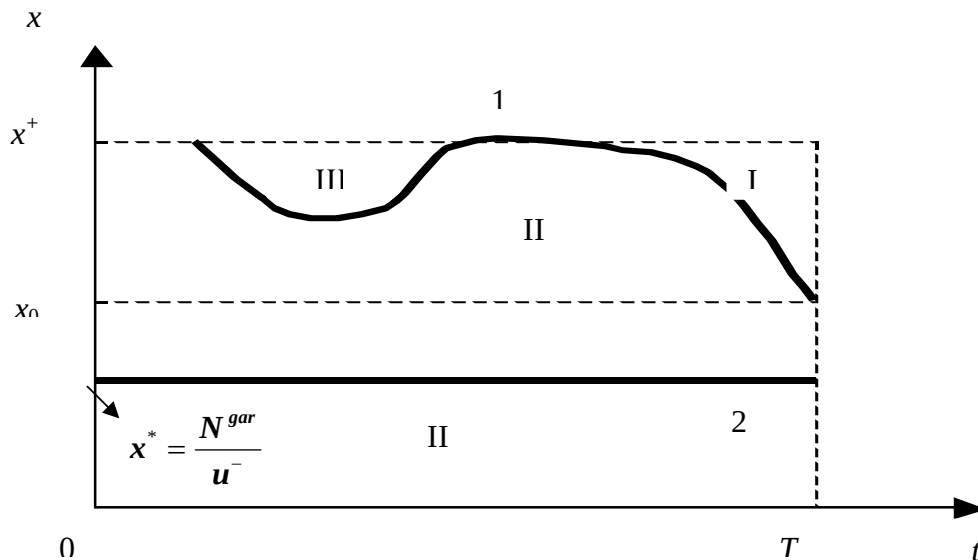


Рис. 11. Оптимальная позиционная стратегия пропуска многоводных половодий, максимизация выработки энергии на ГЭС и выдачи гарантированной мощности: I – зона безопасности ($u=u^{+}$); II – зона избытков ($u=u^{-}$); III – зона гарантированной мощности ($u=N^{gar}/x$); 1 – граница зон I и II; 2 – граница зон II и III (прямая $x=N^{gar}/u^{-}$).

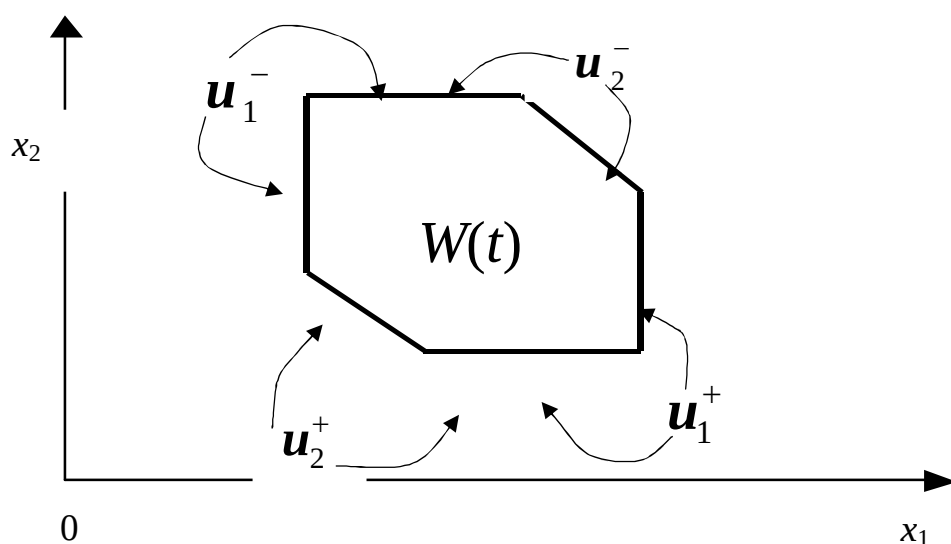


Рис. 12. Сечение максимально стабильного множества и вид экстремальной стратегии для случая каскада из двух водохранилищ.

2.2. Аналитические модели управления водохранилищами

Задача управления каскадом водохранилищ с точки зрения теории оптимального управления представляет собой задачу управления подверженной случайным воздействием динамической системой, на фазовые и управляющие переменные которой наложены сложные ограничения. Качество процесса управления обычно измеряется с помощью некоторого функционала, зависящего от состояния системы и выбранного управления. В такой общей постановке рассматриваемая задача оказывается чрезвычайно трудной. Для нее не удастся получить решения в аналитической форме, а численные методы ее решения требуют огромных затрат машинного времени и памяти.

Основная трудность, стоящая на пути решения этой задачи, заключается в том, что рассматриваемые системы обычно имеют слишком большую размерность и сложную структуру.

В этой ситуации аналитическое исследование упрощенных задач управления каскадом водохранилищ представляет как теоретическое, так и практический интерес. Такие исследования

проводились в работах [Асарина, 1986; Агасандян, 1986; Кукушкин, 1986; Кукушкин, Наврузов, 1988; Меньшиков, Меньшикова, 1983].

Каскады водохранилищ на горных реках создаются преимущественно для удовлетворения нужд ирригации и энергетики. В течение вегетационного периода управление попуском фактически определяется требованиями ирригации, а энергетические требования, как правило, удовлетворяются автоматически. В зимний период определяющими становятся требования энергетики, для выполнения которых приходится увеличивать попуски из водохранилищ (сверх санитарных требований). Потребности ирригации при этом учитываются лишь в том смысле, что ими определяются допустимые уровни сработки водохранилищ. В СССР электроэнергия каскада была связана в единую энергетическую систему, следовательно, можно было, в принципе, увеличивать выработку электроэнергии на любой из них.

После распада СССР, рухнули и существующие ранее связи, каждое из независимых государств исходит из национальных интересов при управлении водными ресурсами, сконцентрированными в речных бассейнах своей республики. Например, Республика Таджикистан располагает каскадом водохранилищ на реке Вахш и, в принципе, может увеличивать выработку электроэнергии на любом из этих водохранилищ. Возникает задача о наиболее рациональном распределении потребной суммарной выработки между электростанциями каскада. *В настоящем параграфе монографии предлагаются упрощенные математические модели каскада гидроэлектростанций, допускающие исчерпывающее аналитическое исследование.*

При этом выделяется группа моделей, в каждой из которых рассматриваются определенные задачи, связанные с практическим решением водохозяйственной проблематики. Так, первая группа моделей связана с задачами максимизации конечного наполнения водохранилищ, с ограничением на выработку электроэнергии. Вторая группа моделей связана с задачами максимизации гарантированной суммарной мощности на гидроэлектростанциях каскада. Третья группа моделей, связана с решением водохозяйственных задач, типа определения гарантированной отдачи, распределения трансграничных водных ресурсов и управления водохранилищами, при этом рассматривается

экономический фактор, достижение максимального чистого суммарного дохода.

Модельные задачи максимизации конечного наполнения водохранилищ. Задачи максимизации конечного наполнения водохранилищ рассматриваются для случая как одиночного, так и каскада водохранилищ. Для удобства аналитического решения рассматриваются модели с непрерывным временем.

I. Рассмотрим общую модельную задачу для каскада водохранилищ. Пусть имеется n последовательно расположенных водохранилищ с ГЭС. Требуется максимизировать суммарное конечное наполнение водохранилищ при заданном ограничении на суммарную выработку электроэнергии в гидроэлектростанциях.

Математическая формулировка задачи имеет следующий вид:
Требуется

$$\sum_{i=1}^n x_i(T) \Rightarrow \max_{\substack{u_i(t) \\ 1 \leq i \leq n}} \quad (2.19)$$

при выполнении условий:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 - u_1 \\ \dot{x}_i = u_{i-1} - u_i, i = 2, 3, \dots, n \\ u_i \in U_i = \{u_i^- \leq u_i(t) \leq u_i^+\}, i = 1, 2, \dots, n \\ \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i \right) dt \geq E^{sum}, E^{sum} = const \\ x_i(0) = x_i^0, i = 1, 2, \dots, n \\ v_i(t) \equiv 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}, \quad (2.20)$$

где $x_i(t)$ – объем i – го водохранилища в момент t ; $u_i(t)$ – попуск из i – го водохранилища в момент t ; $v_i(t)$ – приток к i – му водохранилищу в момент t ; ($v_i(t) \geq 0$). E^{sum} – заданная суммарная потребность в выработке электроэнергии в ГЭС каскада.

При некоторых упрощающих предположениях построим оптимальное управление в задаче (2.1)-(2.2) без фазовых ограничений.

Предположения эти таковы: $v_i(t) \equiv 0, i = 2, 3, \dots, n$ – боковой приток к водохранилищам отсутствует,

$$\int_t^T [v_1(\tau) - u_2^+] d\tau < 0 \text{ для всех } t \in [0, T] \quad (2.21)$$

и

$$\int_t^T [u_{i-1}(\tau) - u_{i+1}^+] d\tau < 0 \text{ для всех } t \in [0, T], \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (2.22)$$

Условие (2.21) означает, что до конца периода регулирования можно пропустить весь пришедший приток через второе водохранилище. Аналогично, условие (2.22) означает, что до конца периода регулирования можно пропустить весь пришедший приток к i -му водохранилищу через $i+1$ -е водохранилище, для всех $i = 2, 3, \dots, n-1$. Заметим, что такие предположения приемлемы, если конец периода регулирования T приходится на период межени.

Применим метод множителей Лагранжа для нахождения оптимальных управлений из водохранилищ, которые максимизировали бы целевую функцию (2.19).

Построим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} = & \int_0^T \left[\lambda_1 \cdot \left(\frac{E^{sum}}{T} - \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot u_i(t) \right) + p_1 \cdot \left(\dot{x}_1(t) - v_1(t) + u_1(t) \right) + \sum_{i=2}^n p_i \cdot \left(\dot{x}_i(t) - u_{i-1}(t) + u_i(t) \right) \right] dt + \\ & + \lambda_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i(T) \right) + \sum_{i=1}^n \lambda_{i+1} \cdot (x_i(0) - x_i^0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Необходимые условия:

- Уравнение Эйлера

$$\dot{p}_i(t) = -\lambda_1 \cdot \hat{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.24)$$

- Трансверсальности по x :

$$\begin{cases} p_i(0) = \lambda_{i+1} \\ p_i(T) = -\lambda_0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.25)$$

- Оптимальности по u :

$$\begin{aligned} \max_{u_i \in U_i} H(t, \hat{x}_i(t), u_i(t), p_i(t)) = & \max_{\substack{u_i \in [u_i^-; u_i^+] \\ i=1, 2, \dots, n}} \left[p_1 \cdot (v_1 - u_1) + \sum_{i=2}^n p_i \cdot (u_{i-1}(t) - u_i(t)) + \lambda_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \hat{x}_i \cdot \hat{u}_i \right) \right] = \\ = & (\lambda_1 \cdot \hat{x}_1(t) + p_2(t) - p_1(t)) \cdot \hat{u}_1(t) + \\ & + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_1 \cdot \hat{x}_i(t) + p_{i+1}(t) - p_i(t)) \cdot \hat{u}_i(t) + (\lambda_1 \cdot \hat{x}_n(t) - p_n(t)) \cdot \hat{u}_n(t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

- Дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1 \cdot \left[\int_0^T \left(\frac{E^{sum}}{T} - \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i(t) \cdot \hat{u}_i(t)) \right) dt \right] = 0 \quad (2.27)$$

- Неотрицательности:

$$\lambda_1 \geq 0$$

Рассмотрим следующие предположения относительно значений множителей Лагранжа:

$$\text{I)} \quad \lambda_0 \neq 0, \quad \lambda_1 = 0,$$

$$\text{II)} \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,$$

$$\text{III)} \quad \lambda_0 \neq 0, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Случай I. При исследовании задачи на максимум полагают значение $\lambda_1 = -1$ или любой другой константе. Из условия трансверсальности по x (2.7) получаем

$$p_i(t) \equiv 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом из (2.8) получаем:

$$\max H(t, \hat{x}_i(t), \hat{u}_i(t), p_i(t)) = -\hat{u}_n(t).$$

Отсюда следует, что для максимизации H необходимо и достаточно, чтобы из n -го водохранилища с гидроузлом назначался попуск, равный u_n^- на всем отрезке $[0, T]$, т.е.

$$\hat{u}_n(t) \equiv u_n^-, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.28)$$

В этом случае попуск из i -го водохранилища $i = 1, 2, \dots, n-1$ назначается из расчета на выполнения ограничения по энергии, т.е. назначается столько, сколько необходимо, чтобы выработать заданную величину суммарной электроэнергии по каскаду. Это означает, что энергетическое требование, предъявляемое к каскаду водохранилищ, может быть выполнено только за счет сработки выше расположенных гидроузлов.

Случай II. Из условия оптимальности (2.26) получаем

$$\begin{aligned} \max_{u_i \in U} H(t, \hat{x}_i(t), \hat{u}_i(t), p_i(t)) = & (\lambda_1 \cdot \hat{x}_1 + p_2 - p_1) \cdot \hat{u}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_1 \cdot \hat{x}_i + p_{i-1} - p_i) \cdot \hat{u}_i + \\ & + (\lambda_1 \cdot \hat{x}_n - p_n) \cdot \hat{u}_n, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $p_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ - функции, удовлетворяющие сопряженным дифференциальным уравнениям

$$\dot{p}_i(t) = -\lambda_1 \cdot u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.30)$$

и условиям трансверсальности

$$p_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.31)$$

Из условия (2.21) для нашей модельной задачи получаем следующий вывод:

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} u_i^+, & \Phi_i(t) > 0 \\ u_i^-, & \Phi_i(t) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то есть оптимальное управление зависит от знака n характеристических функций:

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = \lambda_1 \cdot x_1(t) + p_2(t) - p_1(t) \\ \Phi_2(t) = \lambda_1 \cdot x_2(t) + p_3(t) - p_2(t) \\ \Phi_3(t) = \lambda_1 \cdot x_3(t) + p_4(t) - p_3(t) \\ \dots \dots \dots \dots \\ \Phi_i(t) = \lambda_1 \cdot x_i(t) + p_{i+1}(t) - p_i(t) \\ \Phi_n(t) = \lambda_1 \cdot x_n(t) - p_n \end{cases}$$

С учетом (2.30) функции $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_1(t) = \lambda_1 \cdot (v_1(t) - u_2(t)), \\ \dot{\Phi}_2(t) = \lambda_1 \cdot (u_1(t) - u_3(t)), \\ \dot{\Phi}_3(t) = \lambda_1 \cdot (u_2(t) - u_4(t)), \\ \dots \dots \dots \dots \\ \dot{\Phi}_i(t) = \lambda_1 \cdot (u_{i-1}(t) - u_{i+1}(t)), \\ \dot{\Phi}_n(t) = \lambda_1 \cdot u_{n-1}(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

Проинтегрировав систему (2.32) с конца с учетом (2.31), получаем

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = \lambda_1 \cdot \hat{x}_1(T) - \lambda_1 \cdot \int_t^T [v_1(\tau) - \hat{u}_2(\tau)] d\tau, \\ \Phi_2(t) = \lambda_1 \cdot \hat{x}_2(T) - \lambda_1 \cdot \int_t^T [\hat{u}_1(\tau) - \hat{u}_3(\tau)] d\tau, \\ \Phi_3(t) = \lambda_1 \cdot \hat{x}_3(T) - \lambda_1 \cdot \int_t^T [\hat{u}_2(\tau) - \hat{u}_4(\tau)] d\tau, \\ \dots \dots \dots \dots \\ \Phi_i(t) = \lambda_1 \cdot \hat{x}_i(T) - \lambda_1 \cdot \int_t^T [\hat{u}_{i-1}(\tau) - \hat{u}_{i+1}(\tau)] d\tau, \\ \Phi_n(t) = \lambda_1 \cdot \hat{x}_n(T) - \lambda_1 \cdot \int_t^T \hat{u}_{n-1}(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\Phi_n(t) = \lambda_1 \cdot \hat{x}_n(T) - \lambda_1 \cdot \int_t^T \hat{u}_{n-1}(\tau) d\tau, \quad (2.34)$$

По смыслу нашей модельной задачи нас будет интересовать только случай $\hat{x}_i(T) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Это, в частности, дает $\hat{u}(T) = u_i^+ = (u_1^+, u_2^+, \dots, u_n^+)$. Из условий (2.21), (2.22) и (2.33) следует,

что характеристические функции $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ на отрезке $[0, T]$ не более одного раза обращаются в ноль, т.е. оптимальное управление для первых $n-1$ водохранилищ имеет не более одного переключения. Для последнего n -го водохранилища в силу (2.34) этот факт остается верным независимо ни от каких условий.

Таким образом, имеем

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} u_i^-, & 0 \leq t \leq \hat{t}_i \\ u_i^+, & \hat{t}_i \leq t \leq T \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.35)$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Момент переключения в системе из n водохранилищ наступает сверху вниз, а именно

$$\hat{t}_i \leq \hat{t}_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Доказательство. Предположим обратное, т.е. пусть $\hat{t}_i > \hat{t}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Имеем $\Phi_i(\hat{t}_i) \equiv 0$, тогда при $t \in [\hat{t}_i, T]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(t) = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^t [v_1(\tau) - \hat{u}_2(\tau)] d\tau, \\ \Phi_2(t) = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^t [\hat{u}_1(\tau) - \hat{u}_3(\tau)] d\tau, \\ \Phi_3(t) = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^t [\hat{u}_2(\tau) - \hat{u}_4(\tau)] d\tau, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \Phi_i(t) = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^t [\hat{u}_{i-1}(\tau) - \hat{u}_{i+1}(\tau)] d\tau. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

С одной стороны, из (2.21), (2.22) и (2.36) с учетом (2.35), при $t=T$ получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(T) = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^T [v_1(\tau) - \hat{u}_2(\tau)] d\tau = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^T [v_1(\tau) - \hat{u}_2^+] d\tau < 0, \\ \Phi_2(T) = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^T [\hat{u}_1(\tau) - \hat{u}_3(\tau)] d\tau = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^T [\hat{u}_1(\tau) - \hat{u}_2^+] d\tau < 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \Phi_i(T) = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^T [\hat{u}_{i-1}(\tau) - \hat{u}_{i+1}(\tau)] d\tau = \lambda_1 \cdot \int_{\hat{t}_1}^T [\hat{u}_{i-1}(\tau) - \hat{u}_{i+1}^+] d\tau < 0, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

С другой стороны, при $t=T$ из формулы (2.33) имеем

$$\lambda_1 \cdot \hat{x}_i(T) = \Phi_i(T), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.38)$$

Следовательно, из (2.37) и (2.38) получаем $\hat{x}_i(T) < 0$, что противоречит условию задач (2.21), (2.22).

Таким образом, предположение о том, что $\hat{t}_i > \hat{t}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, неверно и, стало быть, утверждение теоремы справедливо.

Момент переключения $\hat{t}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ определяется из условия дополняющей нежесткости (2.25).

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i(t) \cdot \hat{u}_i(t)) dt = E^{sum}, \text{ так как } \lambda_1 \neq 0.$$

Случай III. Аналогично проделывая ту же схему рассуждения (см. предыдущие случаи), получаем, что оптимальное управление $\hat{u}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ сосредоточено в крайних точках отрезка $[u_i^-, u_i^+]$, $i = 1, 2, \dots, n$ и зависит от знака характеристической функции, $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, а именно

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} u_i^+, & \Phi_i(t) > 0 \\ u_i^-, & \Phi_i(t) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ определяются по формулам (2.33), а для $i = n$ определяется как

$$\Phi_n(t) = \lambda_1 \cdot \hat{x}_n(T) - 1 - \lambda_1 \cdot \int_t^T \hat{u}_n(\tau) d\tau, \quad (2.39)$$

В этом случае также получаем, что оптимальное управление каскадом из n водохранилищ имеет одну точку переключения. Таким образом, имеем

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} u_i^-, & 0 \leq t \leq \hat{t}_i \\ u_i^+, & \hat{t}_i \leq t \leq T \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

причем $\hat{t}_i \leq \hat{t}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Здесь также моменты переключения $\hat{t}_i$, $i = 1, 2$ определяются из условия (2.25).

Таким образом, получаем следующий основной вывод: при максимизации суммарного конечного наполнения n последовательно расположенных водохранилищ, а также при ограничении на суммарную выработку электроэнергии сработка водохранилищ начинается сверху вниз, т.е. сработка каждого из водохранилищ начнется тогда, когда полностью сработаны все вышележащие водохранилища.

Модельные задачи максимизации гарантированной мощности. Каскады водохранилищ на горных реках создаются преимущественно для удовлетворения нужд ирригации и энергетики. В течение вегетационного периода управление

попуском фактически определяется требованиями ирригации, а энергетические требования, как правило, удовлетворяются автоматически. В зимний период определяющими становятся требования энергетики, для выполнения которых приходится увеличивать попуски из водохранилищ (сверх санитарных требований). Потребности ирригации при этом учитываются лишь в том смысле, что ими определяются допустимые уровни сработки водохранилищ.

Если каскад ГЭС связан в единую энергетическую систему, то можно, в принципе, увеличить выработку электроэнергии на любой из них. Иначе, каждое независимое государство будет исходить из своих национальных интересов при управлении водными ресурсами речных бассейнов.

Возникает задача о наиболее рациональном распределении потребной суммарной выработки между электростанциями каскада. В инженерной практике существуют различные подходы к решению этой задачи.

В настоящем параграфе монографии предлагается упрощенная математическая модель каскада гидроэлектростанций, допускающая исчерпывающее аналитическое исследование. Результаты этого исследования дают обоснование одному из применяемых на практике правил, а именно, следующему: *“для удовлетворения требований энергетики следует сбрасывать водохранилища каскада сверху вниз”*.

Аналитическое исследование задачи приводим как для двух последовательно расположенных водохранилищ, так и для каскада из n последовательно расположенных водохранилищ.

I. Рассмотрим наиболее простейший вариант: *случай двух последовательно расположенных водохранилищ*. Исследование задачи проводим при следующих предположениях:

- $v_1(t) \equiv 0$, - приток к первому (верхнему) водохранилищу отсутствует;
- верхние ограничения на объем водохранилищ отсутствуют;
- отсутствует также боковая приточность ко второму (нижнему) водохранилищу, $v_2(t) \equiv 0$.

Требуется

$$\beta \Rightarrow \max_{\{u_i(t), i=1,2\}} \quad (2.40)$$

при условии

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t) - u_2(t) \end{cases} \quad (2.41)$$

$$u_i(t) \geq 0, \quad i=1,2, \quad (2.42)$$

$$x_i(t) \geq x_i^-, \quad i=1,2, \quad (2.43)$$

$$\kappa_1 \cdot x_1(t) \cdot u_1(t) + \kappa_2 \cdot x_2(t) \cdot u_2(t) \geq \beta \cdot N(t), \quad (2.44)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i=1,2, \quad (2.45)$$

где $x_i(t)$ – объем i - го водохранилища в момент t ; $u_i(t)$ – попуск (расход) из i - го водохранилища в момент t ; κ_i $i=1,2$ – коэффициент энерговыработки на i - й станции; $N(t)$ – заданная потребность в суммарной гарантированной мощности, а t пробегает $[0, T]$.

Наряду с задачей (2.40)-(2.45), рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

Требуется

$$\int_0^T (\kappa_1 \cdot x_1(t) \cdot u_1(t) + \kappa_2 \cdot x_2(t) \cdot u_2(t)) dt \Rightarrow \max_{\{u_i(t), i=1,2\}} \quad (2.46)$$

при условиях (2.41)-(2.43) и (2.45), а также

$$\kappa_1 \cdot x_1(t) \cdot u_1(t) + \kappa_2 \cdot x_2(t) \cdot u_2(t) = \beta \cdot N(t) \quad (2.47)$$

1. Используя (2.41), (2.43) и (2.45), можно переписать функционал (2.46) в виде:

$$\int_0^T (\kappa_1 \cdot x_1(t) \cdot u_1(t) + \kappa_2 \cdot x_2(t) \cdot u_2(t)) dt = \kappa_1 \cdot \int_0^T x_1(t) \cdot u_1(t) dt + \kappa_2 \cdot \int_0^T x_2(t) \cdot u_2(t) dt =$$

$$= -\kappa_1 \cdot \int_{x_1^0}^{x_1^-} x_1(t) dx_1(t) - \kappa_2 \cdot \int_{x_2^0}^{x_2^-} x_2(t) dx_2(t) - \kappa_2 \cdot \int_{x_1^0}^{x_1^-} x_2(t) dx_1(t) =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{изменим} \quad \text{порядок} \quad \text{интегрирования} \quad \text{и} \quad \text{водим} \\ \text{функцию:} \quad \psi_1(x_1) = \{x_2 | x_1(t) = x_1\} \end{array} \right| = \kappa_1 \cdot \int_{x_1^-}^{x_1^0} x_1 dx_1 + \kappa_2 \cdot \int_{x_2^-}^{x_2^0} x_2 dx_2 +$$

$$+ \kappa_2 \cdot \int_{x_1^-}^{x_1^0} \psi_1(x_1) dx_1.$$

Заметим, что при любом правиле управления функция $\psi_1(x_1)$ удовлетворяет неравенству:

$$\psi_1(x_1) \leq x_2^0 + (x_1^0 - x_1) \quad (2.48)$$

Таким образом, получаем, что

$$\int_0^T (\kappa_1 \cdot x_1 \cdot u_1 + \kappa_2 \cdot x_2 \cdot u_2) dt = \kappa_1 \cdot \int_{x_1^-}^{x_1^0} x_1 dx_1 + \kappa_2 \cdot \int_{x_2^-}^{x_2^0} x_2 dx_2 + \kappa_2 \cdot \int_{x_1^-}^{x_1^0} \psi_1(x_1) dx_1. \quad (2.49)$$

Ограничение (2.48) выполняется как равенство при таком управлении, когда попуск из второго водохранилища назначается только тогда, когда нет воды в первом водохранилище (т.е. когда уровень воды в первом водохранилище равняется уровню мертвого объема).

Для такого управления функция $\psi_1(x_1)$ принимает максимальное значение x_1 , следовательно, функционал (2.46) достигает своего максимального значения.

Таким образом, оптимальными являются управления $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t)$, которые определяются следующим образом:

$$u_1^0(t) = \begin{cases} \frac{\beta \cdot N(t)}{\kappa_1 \cdot x_1(t)}, & \text{если } x_1(t) > x_1^- \\ 0, & \text{если } x_1(t) = x_1^- \end{cases} \quad (2.50)$$

$$u_2^0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1(t) > x_1^- \\ \frac{\beta \cdot N(t)}{\kappa_2 \cdot x_2(t)}, & \text{если } x_1(t) = x_1^-, \end{cases} \quad (2.51)$$

где величина β определяется из соотношения:

$$\beta = \frac{\kappa_1 \cdot \int_{x_1^-}^{x_1^0} x_1 dx_1 + \kappa_2 \cdot \int_{x_2^-}^{x_2^0} x_2 dx_2 + \kappa_2 \cdot \int_{x_1^-}^{x_1^0} [x_2^0 + (x_1^0 - x_1)] dx_1}{\int_0^T N(t) dt} \quad (2.52)$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Управление $u_1^0(t)$, $u_2^0(t)$ и значение β , определяемые соответственно формулами (2.50), (2.51) и (2.52), являются оптимальными для задач (2.40)–(2.45).

Доказательство. Управление $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t)$ удовлетворяет условиям (2.41) – (2.45). Пусть найдено некоторое управление $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ и значение β^* , которые удовлетворяют условия задач (2.40) – (2.45).

Тогда из (2.43) имеем:

$$\beta^* \cdot \int_0^T N(t) dt \leq \int_0^T (\kappa_1 \cdot x_1^* \cdot u_1^* + \kappa_2 \cdot x_2^* \cdot u_2^*) dt. \quad (2.53)$$

Следовательно, из (2.52) и (2.53) получаем, что

$$\beta^* \leq \frac{\int_0^T (\kappa_1 \cdot x_1^* \cdot u_1^* + \kappa_2 \cdot x_2^* \cdot u_2^*) dt}{\int_0^T N(t) dt} \leq$$

$$\leq \frac{\kappa_1 \cdot \int_{x_1^-}^{x_1^0} x_1 dx_1 + \kappa_2 \cdot \int_{x_2^-}^{x_2^0} x_2 dx_2 + \kappa_2 \cdot \int_{x_1^-}^{x_1^0} [x_2^0 + (x_1^0 - x_1)] dx_1}{\int_0^T N(t) dt} = \beta.$$

Таким образом, получаем $\beta^* \leq \beta$, что означает оптимальность управления $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 3 следует, что модельные задачи (2.40) – (2.45) и (2.46) – (2.47) взаимно эквивалентны.

Итак, в рассмотренной модели при оптимальном управлении первым срабатывает верхнее водохранилище, так же как в модельной задаче п.п.2 данного пункта. Этот факт служит эвристическим обоснованием правила распределения регулирующих функций между водохранилищами, принятым в пункте 2.3.

II. Рассмотрим общий случай, когда имеется n последовательно расположенных водохранилищ с гидроузлами. В основе этой модельной задачи лежат балансовые соотношения. Предполагаются заданными начальные запасы воды в каждом из водохранилищ, которые должны расходоваться в течение заданного промежутка времени при отсутствии притока. Развиваемая каждой из ГЭС каскада мощность принимается пропорциональной произведению попуска через турбину на напор, который, в свою очередь, принимается пропорциональным наполнению водохранилища (т.е. уровень нижнего бьефа считается постоянным). Эти предположения достаточно естественны для высокогорных водохранилищ в зимний период. Управляемыми параметрами являются попуски через турбины ГЭС каскада в каждый момент времени. Целью управления является максимизация степени выполнения заданного графика суммарной мощности.

Итак, рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$\beta \Rightarrow \max_{\{u_i(t), i=1,2,\dots,n\}} \quad (2.54)$$

$$\dot{x}_1(t) = -u_1(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.55)$$

$$\dot{x}_i(t) = u_{i-1}(t) - u_i(t), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad t \in [0, T], \quad (2.56)$$

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i \cdot x_i(t) \cdot u_i(t) \geq \beta \cdot N(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.57)$$

$$x_i(t) \geq x_i^-, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad t \in [0, T], \quad (2.58)$$

$$x_i(T) \geq x_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.59)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.60)$$

Здесь x_i - объем наполнения водохранилища с номером i (нумерация ведется сверху вниз), u_i - попуск из водохранилища с номером i , $N(t)$ – график потребной суммарной мощности, β - степень его выполнения, κ_i - коэффициент пропорциональности в выражении для мощности ГЭС с номером i , x_i^- - объем наполнения водохранилища с номером i , соответствующий уровню мертвого объема, x_i^T - объем наполнения водохранилища с номером i , требуемый для обеспечения нужд ирригации в последующий период времени, x_i^0 - начальное наполнение водохранилища с номером i . Предполагаем $0 < x_i^- \leq x_i^T \leq x_i^0$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Задача (2.54)-(2.60) представляет собой задачу оптимального управления со смешанными ограничениями. Хотя для таких задач известны необходимые условия оптимальности типа принципа максимума [Алексеев, Тихомиров, Фомин, 1979; Дубовицкий, Милютин, 1971], они лишь в редких случаях позволяют получить явное решение. В данном случае, однако, удастся получить такое решение с помощью преобразований, использующих физический смысл задачи.

Введем обозначения

$$y_i^0 = \sum_{j=1}^i x_j^0, \quad y_i^T = \sum_{j=1}^i x_j^T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad y_0^0 = y_0^T = 0.$$

$$P = \sum_{i=1}^n \kappa_i \cdot \left(\int_{x_i^T}^{x_i^0} x dx + \int_{y_{i-1}^T}^{y_{i-1}^0} (y_i^0 - y) dy \right)$$

$$E = \int_0^T N(t) dt, \quad \beta^0 = \frac{P}{E}$$

$$u_i^0(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \leq x_i^T \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{i-1} x_j > y_{i-1}^T, \\ \frac{\beta^0 \cdot N(t)}{\kappa_i \cdot x_i}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\bar{u}^0(t) = (u_1^0(t), \dots, u_n^0(t))$, $\bar{x}^0(t) = (x_1^0(t), \dots, x_n^0(t))$ траектория, получающаяся при подстановке синтеза $\{u_i^0(t, x_1, \dots, x_n)\}$ вместо U в уравнения (2.55), (2.56) при начальном условии (2.60).

Теорема 4. Набор β^0 , $\bar{u}^0(t)$, $\bar{x}^0(t)$ является оптимальным решением модельной задачи (2.54) – (2.60).

Доказательство. Выполнение всех ограничений для набора β^0 , $\bar{u}^0(t)$, $\bar{x}^0(t)$ проверяется непосредственно. Далее, для произвольных β , $u(t)$, $x(t)$, удовлетворяющих ограничениям (2.55) – (2.60), получаем, интегрируя неравенство (2.57),

$$\beta \cdot E \leq \sum_{i=1}^n \int_0^T \kappa_i \cdot x_i(t) \cdot u_i(t) dt \quad (2.61)$$

Положим

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^i x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad y_0(t) \equiv 0.$$

Используя (2.55) и (2.56) и проводя замену переменных под интегралом, получаем

$$\int_0^T x_i(t) \cdot u_i(t) dt = - \int_0^T x_i(t) \cdot \dot{x}_i(t) dt - \int_0^T x_i(t) \cdot \dot{y}_{i-1}(t) dt = \int_{x_i^T}^{x_i^0} x dx + \int_{y_{i-1}^T}^{y_{i-1}^0} x_i(y_{i-1}) dy_{i-1} \quad (2.62)$$

Из условий (2.55), (2.56) вытекает, что функции $y_i(t)$ не возрастают, поэтому функция $x_i(y_{i-1})$ при $i = 2, 3, \dots, n$ определена однозначно, за исключением множества значений аргумента меры нуль. Непосредственная проверка показывает, что при $x_i(t) \equiv x_i^0(t)$ нижние пределы обоих интегралов в правой части (2.62) принимают наименьшие возможные значения x_i^T и y_{i-1}^T , а функция $x_i(y_{i-1})$ – наибольшее возможное значение при каждом y_{i-1} , равном $y_i^0 - y_{i-1}$. Следовательно,

$$\int_0^T x_i(t) \cdot u_i(t) dt \leq \int_{x_i^T}^{x_i^0} x dx + \int_{y_{i-1}^T}^{y_{i-1}^0} (y_i^0 - y) dy. \quad (2.63)$$

Из (2.61) и (2.63) сразу вытекает, что $\beta \cdot E \leq P$ или $\beta \leq \beta^0$. Теорема доказана.

Отметим, что, согласно определению оптимального синтеза $u_i^0(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, сработка каждого из водохранилищ начинается тогда, когда полностью сработаны все вышележащие водохранилища.

Замечание. Мы предполагали структуру каскада линейной лишь для простоты обозначений. Теорема остается справедливой и для произвольного древовидного каскада.

Модельные задачи распределения водных ресурсов. Одним из важных вопросов, которые рассматриваются в водохозяйственной практике, являются задачи распределения водных ресурсов между водопользователями. При этом тип и качественные характеристики рассматриваемых задач напрямую зависят от расположения водопользователей к источникам водных ресурсов, [Бурков, Кондратьев, 1981].

В настоящее время задача распределения и использования водных ресурсов приобрела особую актуальность в связи с проблемой управления и использования трансграничных водных ресурсов, где каждое государство предъявляет свои требования к использованию водных ресурсов. Зачастую эти требования не совпадают. Нахождение компромиссных решений, удовлетворяющих каждого участника, вовлеченного в процесс распределения некоторого количества воды - Q , является основной задачей.

Рассмотрим модельные задачи распределения трансграничных водных ресурсов с точки зрения аналитического исследования, качественные особенности решения которых позволят нам в дальнейшем использовать их в рамках имитационных моделей.

Итак, рассматриваем некоторый трансграничный бассейн реки WB_{TR} , охватывающий территорию нескольких сопредельных государств. Общий потенциальный объем воды, используемый в этом бассейне, обозначим через $Q_{\max}^*$. В качестве упрощения предположим, что все участники в равной степени готовы претендовать на использование данного объема воды $Q_{\max}^*$. Однако рассмотрим один из возможных вариантов решения задачи, так называемой *первой модельной задачи распределения воды*.

Первая модельная задача распределения воды.

Проанализируем задачу распределения водных ресурсов между участниками, в которой рассматриваются вогнутые функции чистого дохода. Предположим, что валовая продукция каждого участника – водопользователя k определяется функцией $a_k \cdot [1 - e^{-b_k \cdot x_k}]$, а удельные затраты с помощью вогнутой функции $c_k \cdot x_k^{d_k}$, где c_k и d_k – известные положительные константы и $d_k < 1$. Эта стоимостная функция характеризуется уменьшающимися приростами затрат при увеличении количества используемой воды x_k .

Пусть, по-прежнему цель – *максимизировать суммарный чистый доход*. Тогда модель управления будет иметь вид

$$\mathfrak{R}(X) = \sum_{k=1}^n [a_k \cdot (1 - e^{-b_k \cdot x_k}) - c_k \cdot x_k^{d_k}] \Rightarrow \max \quad (2.64)$$

при

$$\sum_{k=1}^n x_k \leq Q_{\max}^* \quad (2.65)$$

и условия неотрицательности для каждого участника – водопользователя k

$$x_k \geq 0, \quad k = 1.2...., n, \quad (2.48)$$

Эту модифицированную задачу трудно решить с помощью метода множителей Лагранжа, так как выражения, полученные в результате приравнивания частных производных лагранжиана к нулю, могут не привести к решению. Более того, целевая функция (2.64) может не быть вогнутой в области возможных значений x_k . Такая задача легко решается с помощью *метода динамического программирования* [Беллман, Колаба, 1969; Беллман, Дрейфус, 1965].

Представим задачу распределения трансграничных водных ресурсов в виде последовательного процесса распределения или многошаговой процедуры принятия решения (рис.13). При этом задача подачи воды каждому водопользователю рассматривается как стадия или шаг в последовательности принятия решений. При подаче k -му участнику–пользователю воды x_k из суммарного количества воды $Q_{\max}^*$ на k – м шаге получаемый чистый доход будет

$$\mathfrak{R}_k(x_k) = a_k \cdot [1 - e^{-b_k \cdot x_k}] - c_k \cdot x_k^{d_k}.$$

И пусть, наконец, $f_1(Q_{\max}^*)$ - максимальный чистый доход всех n водопользователей при подаче им воды в количестве $Q_{\max}^*$

$$f_1(Q_{\max}^*) = \max_{x_1} [\mathfrak{F}_1(x_1) + f_2(Q_{\max}^* - x_1)], \quad 0 \leq x_1 \leq Q_{\max}^*. \quad (2.73)$$

Цепочка формул (2.70)-(2.73) и есть объяснение смысла многошаговой процедуры (2.68) и (2.69), то есть нахождения оптимальных значений водоподачи $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ всем водопользователям для достижения суммарного максимального чистого дохода путем применения многошаговой процедуры принятия решений. Описанная процедура показывает порядок выполнения вычислений от номера n к номеру 1 с добавлением на каждом шаге следующего водопользователя.

II. Процедура определения оптимальных значений x_k^* может разворачиваться с шага 1 и продвигаться к шагу n . Пусть $f_1^0(S_1)$ - максимальный чистый доход, который может быть получен 1-м водопользователем при подаче ему воды в количестве S_1

$$f_1^0(S_1) = \max_{x_1} [\mathfrak{F}_1(x_1)], \quad 0 \leq x_1 \leq S_1, \quad S_1 \in [0, Q_{\max}^*]. \quad (2.74)$$

Далее обозначим $f_2^0(S_2)$ - максимальный чистый доход, который может быть получен двумя водопользователями с номерами 1 и 2 при подаче им воды в количестве S_2

$$f_2^0(S_2) = \max_{x_2} [\mathfrak{F}_2(x_2) + f_1^0(S_2 - x_2)], \quad 0 \leq x_2 \leq S_2, \quad S_2 \in [0, Q_{\max}^*]. \quad (2.75)$$

И, наконец, пусть $f_n^0(S_n)$ - максимальный чистый доход, который может быть получен n водопользователями при подаче им воды в количестве $S_n = Q_{\max}^*$

$$f_n^0(S_n) = \max_{x_n} [\mathfrak{F}_n(x_n) + f_{n-1}^0(S_n - x_n)], \quad 0 \leq x_n \leq Q_{\max}^*. \quad (2.76)$$

Цепочка формул (2.74)-(2.76) и есть объяснение смысла многошаговой процедуры (2.68), (2.69).

Отметим, что при наложении дополнительных ограничений на переменные x_k заметно сокращается число вычислений для определения оптимального решения.

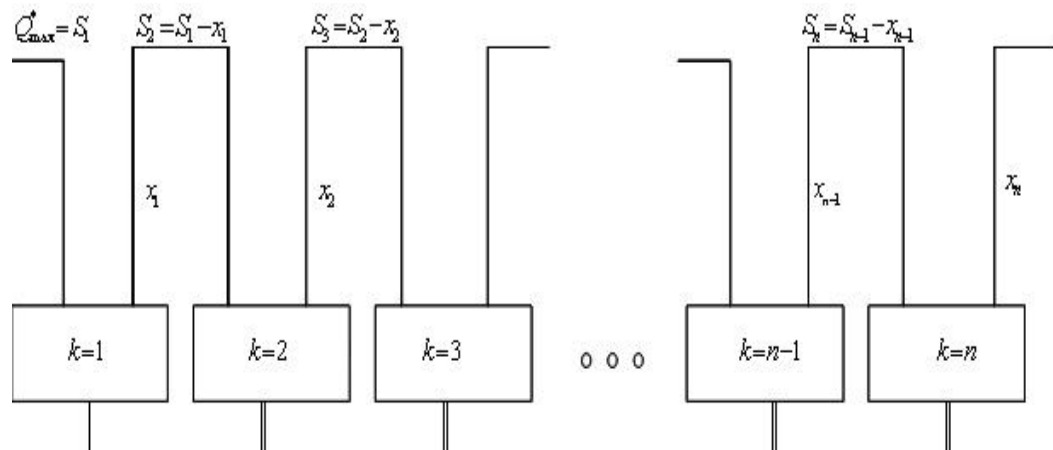


Рис. 13. Многошаговая процедура принятия решений.

Вторая модельная задача распределения воды. В этом параграфе рассматривается задача управления водохранилищем как многошаговый процесс принятия решения. Для ее решения применяется метод динамического программирования [Беллман, Колаба, 1969; Беллман, Дрейфус, 1965]. Динамическое программирование является довольно эффективным, оригинальным математическим методом исследования операций. Одно из наиболее важных достоинств этого метода – *возможность оптимизировать динамические процессы*, поскольку он позволяет повторять оптимизацию на всех этапах процесса до тех пор, пока последний не станет оптимальным в полном смысле этого слова. *Этот метод не ограничивает тип целевой функции, которая может не быть линейной или даже не описываться аналитически.*

Рассмотрим функционирование одиночного водохранилища. Его состояние в произвольные дискретные моменты времени τ , $\tau \in S = \{0, 1, 2, \dots, \theta\}$, $\theta = K \cdot T$, где K – количество рассматриваемых лет, а T – количество интервалов внутри каждого года, характеризуется полезным объемом содержащей в нем воды. Зададим “начальный” объем $x(0)$.

Изменение состояния водохранилища определяется балансовым соотношением

$$x(\tau + 1) = x(\tau) + v(\tau) - u(\tau) - e(\tau), \quad \tau \in S. \quad (2.77)$$

Здесь $v(\tau)$ – приток воды в водохранилище на интервале времени между моментами τ и $\tau + 1$ (такому интервалу приписывается номер τ), $u(\tau)$ – попуск воды через плотину водохранилища на том же интервале, $e(\tau)$ – потери на испарение на интервале τ .

Для оценки потерь на испарение необходимо знать зависимость площади поверхности водохранилища от объема и норму потерь на испарение для каждого интервала. Умножая среднюю площадь поверхности потерь на норму испарения, получаем потери на испарение на данном интервале.

На объем $x(\tau)$ накладываются ограничения

$$x^- \leq x(\tau) \leq x^+, \quad (2.78)$$

где x^- и x^+ соответственно минимально и максимально допустимые объемы воды в водохранилище. На попуск $u(\tau)$ наложим лишь естественное ограничение снизу $u(\tau) \geq 0$.

В детерминированных задачах управления водохранилищем предполагается, что последовательность притоков $v(\tau)$ (календарный многолетний ряд) считается заданной, а последовательность пропусков $u(\tau)$ должна быть определена.

Рассмотрим следующую задачу управления: при заданном объеме воды в водохранилище требуется определить последовательность пропусков, максимизирующую суммарный чистый доход P .

Будем предполагать, что функция чистого дохода

$$P(\tau) = P(\tau, x(\tau), x(\tau + 1), u(\tau))$$

положительна $P(\tau) \geq 0$ и периодическая с периодом T , т.е.

$$P(\tau) \equiv P(\tau + T) = P(\tau + T, x(\tau + T + 1), u(\tau + T)).$$

Функция чистого дохода $P(\tau)$ в каждый момент времени τ является функцией начального, и конечного объемов воды в водохранилище и пропуска воды из водохранилища. С одной стороны, поддержание определенных уровней воды в водохранилище обеспечивает доход $P(\tau, x(\tau), x(\tau + 1), u(\tau))$ от гидроэнергетики, а с другой стороны, доход от пропусков может быть связан с развитием ирригации, водоснабжения, судоходства и поддержанием качества воды.

Критерием управления является максимизация суммарного годового дохода, т.е.

$$\sum_{\tau=1}^T P(\tau, x(\tau + 1), u(\tau)) \Rightarrow \max \quad (2.79)$$

Как уже было отмечено, задача управления водохранилищем, определенная в (2.77)-(2.79), рассматривается как многошаговый процесс принятия решения (см. рис.14).

Шагом управления является время, а переменными состояния - объемы водохранилища. Для поставленной задачи (2.77)-(2.79) используем процедуру динамического программирования "ходом назад".

Двигаясь "ходом назад", можно определить момент времени, после которого оптимальный режим попусков (управления) $\{u(\tau)\}$, определенный с помощью модели, не будет изменяться.

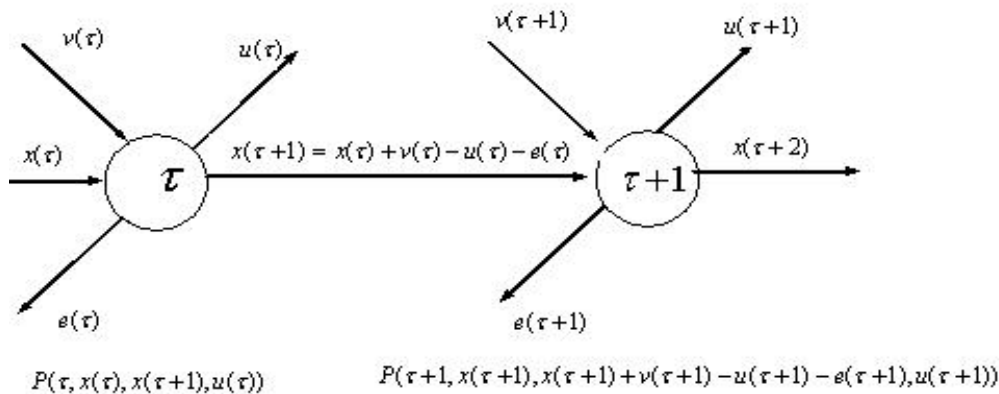


Рис.14. Процесс принятия решения.

Пусть T - произвольный конечный интервал. Определяем функцию максимального чистого дохода $F^1(T, x(T))$, который получается от эксплуатации водохранилища в последний интервал последнего года при начальном объеме водохранилища $x(T)$:

$$F^1(T, x(T)) = \max_{u(T) \geq 0} [P(T, x(T), x(T) + v(T) - e(T), u(T))] \quad (2.80)$$

при условии

$$x(T) + v(T) - e(T) \geq u(T), \quad x^- \leq x(T) + v(T) - u(T) - e(T) \leq x^+.$$

Ограничение, накладываемое на попуск $u(T)$, определяется имеющимся количеством воды с учетом испарения и количеством воды, приводящим к сбросу, если максимальный объем водохранилища x^+ превышен. Выражение (2.80) должно быть решено для дискретных значений $x(T)$ в интервале от минимального допустимого объема водохранилища x^- в этот период до максимально возможного объема водохранилища x^+ . Эти значения $F^1(T, x(T))$ будут нужны для решения следующего рекуррентного уравнения. При движении "ходом назад" следующим шагом станет предыдущий интервал года $T - 1$.

В этом случае функция $F^2(T - 1, x(T - 1))$ представляет максимальный суммарный чистый доход, получаемый за два предстоящих интервала времени $(T - 1, T)$ при начальном объеме $x(T - 1)$ в интервале $T - 1$.

Так как

$$x(T) = x(T-1) + v(T-1) - u(T-1) - e(T-1),$$

то $F^1(T, x(T))$, может быть выражена через $x(T-1)$, переменную $u(T-1)$, а также параметр $e(T-1)$ и приток $v(T-1)$, т.е.

$$F^2(T-1, x(T-1)) = \max_{u(T-1) \geq 0} \{ [P(T-1, x(T-1) + v(T-1) - u(T-1) - e(T-1), u(T-1))] + F^1(T, x(T-1) + v(T-1) - u(T-1) - e(T-1)) \} \quad (2.81)$$

при условии

$$u(T-1) \geq 0; \quad x(T-1) + v(T-1) - e(T-1) \geq u(T-1);$$

$$x^- \leq x(T-1) + v(T-1) - u(T-1) - e(T-1) \leq x^+.$$

Уравнение (2.63) также должно быть решено для всех дискретных значений $x(T-1)$ в интервале (x^-, x^+) .

Продолжая двигаться назад во времени, можно записать общее рекуррентное уравнение для каждого интервала τ с оставшимися интервалами n , ($n > 1$)

$$F^n(\tau, x(\tau)) = \max_{u(\tau) \geq 0} [P(\tau, x(\tau) + v(\tau) - u(\tau) - e(\tau), u(\tau)) + F^{n-1}(\tau+1, x(\tau) + v(\tau) - u(\tau) - e(\tau))] \quad (2.82)$$

при условии

$$u(\tau) \geq 0; \quad x(\tau) + v(\tau) - e(\tau) \geq u(\tau);$$

$$x^- \leq x(\tau) + v(\tau) - u(\tau) - e(\tau) \leq x^+,$$

где индекс n , начиная с 1, увеличивается с каждым шагом, а индекс τ уменьшается внутри каждого года от T до 1.

Необходимо определить, сколько рекуррентных уравнений типа (2.72) должно быть решено для достижения оптимального режима попусков $u(\tau)$ для каждого периода τ , связанного с каждым дискретным значением начального объема водохранилища $x(\tau)$. Заметим, что если рассмотреть три или четыре года эксплуатации, оптимальный попуск $u(\tau)$ для каждого значения начального объема водохранилища $x(\tau)$ будет таким же, как и соответствующие $u(\tau)$ и $x(\tau)$ в предыдущем году. Такое решение называется стационарным. Максимальный годовой чистый доход при этом будет $F^{n+T}(\tau, x(\tau)) - F^n(\tau, x(\tau))$ для любого значения $x(\tau)$ и τ .

Таким образом, чистый доход, полученный в результате каждого решения на каждом шаге задачи, зависит только от переменных состояния этого шага и не зависит от решений, принятых на других шагах (условия аддитивности). Заметим, что

метод динамического программирования нецелесообразно использовать для совместного определения оптимального объема водохранилища и оптимального режима попусков, так как функция чистого дохода будет уже не единственной для разных интервалов времени или шага.

Для более эффективного решения таких задач необходимо использование других методов (например, математического программирования, а также эвристических методов [Агасандян, 1984; Крицкий, Менкель, 1952; Меньшиков, Чабан, 1985; Чабан, 1986]).

2.2. Оптимизационные модели управления водохранилищами

В данном параграфе предлагаются оптимизационные модели управления режимами работы водохранилищ в бассейне трансграничных рек. Пусть трансграничный бассейн разделен на две зоны – зону формирования водных ресурсов и зону их потребления. В зоне формирования функционирует водохранилище многолетнего регулирования, а в зоне потребления – водохранилище сезонного регулирования. Рассматриваются иерархические задачи управления водохранилищами, которые обеспечивают агрегированные потребности государств зоны потребления на орошаемое земледелье, при условии выполнения ограничений на производство гидроэлектроэнергии.

Модель управления водохранилищем многолетнего регулирования. Многолетнее регулирование стока реки осуществляется водохранилищами для аккумуляции части стока реки в многоводные годы и последующего распределения этого ресурса в маловодные годы. Пусть к водохранилищу многолетнего регулирования предъявляются требования со стороны орошаемого земледелья и гидроэнергетики.

Рассмотрим иерархические задачи управления, когда, с одной стороны требуется минимизировать разность между фактическим и желаемым попуском в нижнем бьефе водохранилища, а с другой, требуется максимизировать суммарную выработку электроэнергии в течение многолетнего периода.

Управлением является функция $u^k(t)$ – фактический попуск воды из водохранилища в интервал t года k для многолетнего ряда $\{n \times T\}$, где n – совокупность лет, занумерованных индексом

$k = 1, 2, \dots, n$. Каждый год разбит на T интервалов с текущим индексом t , $t = \overline{1, T}$. Пусть $w^k(t)$ - требуемый попуск воды в интервале t года k , необходимый для удовлетворения потребностей орошаемого земледельца. Выработка электроэнергии в интервал t года k обозначается через $E^k(t)$.

Задача заключается в оптимальном выборе управления $u^k(t)$, который доставляет минимальное или максимальное значение критериальным функциям:

$$I_{irr} = \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^T (u^k(t) - w^k(t))^2, \quad (2.83)$$

$$I_{elec} = \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^T E^k(t). \quad (2.84)$$

Динамика состояния водохранилища описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx^k(t)}{dt} = v^k(t) - u^k(t), \quad (2.85)$$

$$v^k(t) \geq 0, \quad u^k(t) \geq 0, \quad (2.86)$$

здесь $x^k(t)$, $v^k(t)$ - соответственно объем и приток воды к водохранилищу в интервале t года k .

Считается заданным начальный объем воды в водохранилище

$$x^1(0) = x^0, \quad x^{k+1}(0) = x^k(T), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (2.87)$$

а также выполняются ограничения

$$x^- \leq x^k(t) \leq x^+, \quad (2.88)$$

где x^- и x^+ соответственно минимальный и максимально допустимые объемы воды в водохранилище, и

$$\sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^T H(\bar{x}^k(t), u^k(t)) \cdot u^k(t) \cdot \eta \geq E^k(t), \quad (2.89)$$

где $H(\circ, \circ)$ - напор ГЭС, монотонно возрастающая функция по $\bar{x}^k(t) = \frac{x^k(t+1) + x^k(t)}{2}$ и монотонно убывающая функция по $u^k(t)$; η - заданный коэффициент, определяющий КПД гидроэлектростанции.

Таким образом, имеем задачу оптимального управления, заключающуюся в минимизации (2.83) и (или) максимизации целевой функции (2.84) при ограничениях (2.85)-(2.89). Для ее решения используется специальный язык моделирования GAMS

(General Algebraic Modeling System) [Brooke, Kendrick, Meeraus, 1988].

Найденное оптимальное управление $u^k(t)$ является попуском воды из водохранилища многолетнего регулирования и рассматривается в качестве притока к водохранилищу сезонного регулирования.

Модель управления водохранилищем сезонного регулирования Сезонное регулирование водохранилища предназначено для удовлетворения потребности различных водопользователей и водопотребителей с заданной степенью обеспеченности.

Задача оптимального управления водохранилищем сезонного регулирования сводится к нахождению такого графика годового стока воды из водохранилища, при котором обеспечивается максимальное значение критерия

$$\mathfrak{Z} = \sum_i \alpha_i \cdot \mathfrak{Z}_i \quad (2.90)$$

(α_i - положительное число, отражающее приоритетность i -го критерия $\mathfrak{Z}_i$) при выполнении условий:

❖ баланса водопотребления w в интервал t в районе водохозяйственного объекта

$$\sum_{(v,w) \in VW} Q_v^w(t) + \sum_{(k,w) \in KW} Q_k^w(t) + \sum_{(r,w) \in RW} Q_r^w(t) = F_w^t \cdot W_w^t, \quad (2.91)$$

где VW - соединение притока с потребителями; $Q_v^w(t)$ - объем стока от узла на притоке V к потребителю W в интервал t ; KW - соединение реки с потребителями; $Q_k^w(t)$ - объем стока от речного узла k к потребителю W в интервал t ; RW - соединения водохранилищ с потребителями; $Q_r^w(t)$ - объем стока из водохранилища r к потребителю W в интервал t .

❖ лимита источника воды

$$\sum_{(v,w) \in VW} Q_v^w(t) + \sum_{(v,k) \in VK} Q_v^k(t) + \sum_{(v,r) \in VR} Q_v^r(t) \leq V_v(t), \quad (2.92)$$

где VK - соединения притока с рекой; $Q_v^k(t)$ - объем стока от узла на притоке V к речному узлам k в интервал t ; VR - соединения притока с водохранилищем; $Q_v^r(t)$ - объем стока от узла на

притоке V в водохранилище r в интервал t ; $V_v(t)$ - приток от поверхностных источников в интервал t .

❖ баланса воды на основных речных узлах

$$Q_k(t) = V_{k=v^-}(t) + \sum_{(r,k) \in RK} Q_r^k(t) + \sum_{(v,k) \in VK} Q_v^k(t) + \sum_{(k,w) \in KW} Q_k^w(t) - \sum_{(k,w) \in KW} 0,1 \cdot [Q_k^w(t-1) + Q_k^w(t=T)], \quad (2.93)$$

где $k = v^-$ - речной узел равен основному стволу, где расположено водохранилище; RK - соединения водохранилищ с рекой; $Q_r^k(t)$ - объем стока из водохранилища r к речным узлам k в интервал t ; $Q_k(t)$ - объем стока на речных узлах k в интервал t .

❖ баланса воды в водохранилище

$$X_r(t-1) + \sum_{(v,r) \in VR} Q_v^r(t) + \sum_{(k,r) \in KR} Q_k^r(t) = X_r(t) + \sum_{(r,w) \in RW} Q_r^w(t) + \sum_{(r,k) \in RK} Q_r^k(t), \quad (2.94)$$

где $X_r(t)$ - наполнение водохранилища r в интервал t ; KR - соединение реки с водохранилищами; $Q_k^r(t)$ - объем стока от речных узлов k к водохранилищу r в интервал t ; RW - соединение водохранилища с потребителями; $Q_r^w(t)$ - объем стока из водохранилища r к потребителю W в интервал t .

❖ производства гидроэлектроэнергии

$$E_n(t) \leq \sum_{(r,n) \in RN} \bar{H}_r(t) \cdot \bar{Q}_r(t) \cdot \eta_n \quad (2.95)$$

$$\text{где } \bar{Q}_r(t) = \sum_{(r,k) \in RK} Q_r^k(t), \quad \bar{H}_r(t) = \frac{H_r(t) + H_r(t-1)}{2} - H_{н.б.}^n,$$

η_n - производительность электростанции n ; $H_{н.б.}^n$ - отметка уровня нижнего бьефа электростанции n ; $H_r(t)$ - гидростатистический напор водохранилища r в интервал t ; $E_n(t)$ - производство гидроэлектроэнергии на станции n в интервал t .

❖ ограничений на приток в нижнем бьефе водохранилища

$$\sum_{(r,k) \in RK} Q_r^{k='ниж.меч'}(t) \geq \sum_t A_r^w(t), \quad (2.96)$$

где $A_r^w(t)$ - требование, предъявляемое потребителем w в нижнем бьефе водохранилища r в интервал t .

Предлагаемая модель (2.90)-(2.96) основывается на четырех частных критериях:

а) увеличение водоснабжения для всех водопотребителей

$$\mathfrak{I}_1 = \sum_w \sum_t \frac{F_w^t \cdot W_w^t}{SW^t}, \quad SW^t = \sum_w W_w^t,$$

где F_w^t - соотношение между водоснабжением и водопотреблением потребителя W в интервал t ; W_w^t - ирригационные и не ирригационные водопотребления потребителя W в интервал t ;

б) снижение разницы в дефиците на воду между всеми потребителями. Это уравнивает права на воду потребителей, то есть гарантирует равное разделение имеющейся в распоряжении воды, и, с другой стороны, обеспечивает равномерное распределение дефицита воды для моментов времени

$$\mathfrak{I}_2 = \sum_w F_{\min}^w + \sum_t F_{\min}^t,$$

где $F_{\min}^t = \min_w \{F_w^t\}$ - минимальное значение F_w^t среди потребителей w ; $F_{\min}^w = \min_t \{F_w^t\}$ - минимальное значение F_w^t в течение всех интервалов t . Для достижения этой цели модель увеличивает $F_{\min}^w$ при минимальном F_w^t в какой-либо период для всех потребителей и увеличивает $F_{\min}^t$ при минимальном F_w^t для одного потребителя во все интервалы;

в) увеличение минимального производства гидроэлектроэнергии во все интервалы на станции n

$$\mathfrak{I}_3 = \min_t \{E_n(t), N_n(t)\};$$

г) увеличение производства гидроэлектроэнергии на каждой станции в каждом интервале

$$\mathfrak{I}_4 = \sum_t \sum_n \frac{E_n(t)}{N_n(t)},$$

где $E_n(t)$ - производство электроэнергии на станции n в интервал t ; $N_n(t)$ - потребности в производстве электроэнергии на станции n в интервал t .

Рассматриваются линейные зависимости объема водохранилища от напора и площади зеркала от объема водохранилища. Для решения сформулированной задачи использовался язык моделирования GAMS [Brooke, Kendrick, Meeraus, 1988]. Установлено, что водохранилище многолетнего регулирования может проводить независимую водную политику, подчиняя её либо выработке максимального количества электроэнергии, либо обеспечению максимальных потребностей ирригации, либо оптимизации распределения воды между потребностями энергетики и ирригации.

Водохранилище сезонного регулирования, приточность в которое определяется режимом попуска из верхнего водохранилища, может подчинить свою деятельность интересам водопотребителей, расположенным в нижнем бьефе.

Результаты численных экспериментов по этому сценарию представлены в табл. 1-4; рис. 15-22;

Практическая ценность теоретических исследований проверялась на примере каскада из двух водохранилищ – Токтогульского (многолетнего регулирования, Кыргызстан) и Кайраккумского (сезонного регулирования, Таджикистан), расположенных на реке Сырдарье. Если деятельность последнего нацеливать на максимальное удовлетворение интересов Таджикистана (производство электроэнергии), то его сезонный график сработки должен соответствовать тому, который показан рис. 21 (а). С другой стороны, если водохранилище настраивается на выполнение потребностей Узбекистана и Казахстана, то оно должно придерживаться сезонного графика (рис. 21 (б)), несовместимого с (а)). Компромиссное решение заключается в том, чтобы при реализации варианта (б) или какого-либо промежуточного между (а) и (б) дефицит Таджикистана в выработке электроэнергии следует покрывать компенсационными услугами со стороны Узбекистана и Казахстана.

Что касается Токтогульского водохранилища, то для выполнения Кайраккумским водохранилищем графика (б), ему придется откорректировать многолетний график на интервале времени август-ноябрь, что возможно осуществить на условиях

получения компенсаций со стороны Узбекистана и Казахстана (рис. 22).

Также рассматривается один из допустимых гипотетических сценариев чередования маловодных и многоводных лет при функционировании Токтогульского водохранилища. Анализ и обработка полученных результатов модели свидетельствуют о том, что данное водохранилище введет себя стабильно при многолетнем регулировании, и оно опорожняется лишь при гипотетическом варианте и то в последнем маловодном году (*рассматривались пять маловодных и пять многоводных лет*). Между тем ясно, что наступление такого сценария очень маловероятно.

Результаты численных экспериментов математической модели Токтогульского водохранилища

Основные входные параметры Токтогульского водохранилища:

- максимальный объем - 19,5 км³;
- минимальный объем (соответствующий УМО) - 5,5 км³;
- начальный объем (x^0) - 5,5 км³;
- начальный уровень воды - 833,928 м.

Ирригационная задача

Таблица 1

	многоводные годы					маловодные годы				
Показатели	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Годовой приток к водохранилищу (км ³)	14,002	14,002	14,002	14,002	14,002	8,402	8,402	8,402	8,402	8,402
Годовой объем фактического попуска (км ³)	12,059	12,258	12,258	12,258	11,316	10,374	10,374	10,374	10,374	10,374
Годовая выработка электроэнергии (мВт.ч)	5443,79	5932,28	6290,83	6611,98	6462,4	5796,07	5502,85	5190,4	4816,58	4370,21

Энергетическая задача

Таблица 2

	многоводные годы					маловодные годы				
Показатели	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Годовой приток к водохранилищу (км ³)	14,002	14,002	14,002	14,002	14,002	8,402	8,402	8,402	8,402	8,402
Годовой объем фактического попуска (км ³)	3,108	11,326	14,002	14,002	13,568	8,402	8,402	8,402	8,402	22,403
Годовая выработка электроэнергии (мВт.ч)	1595,94	6902,21	8472,53	8472,53	8214,41	5188,71	5188,71	5188,71	5188,71	11618,46

Геометрическая интерпретация полученных результатов математической модели Токтогульского водохранилища

Энергетическая задача



Рис.15

Ирригационная задача



Рис.16

**Анализ полученных результатов
по модели Кайраккумского водохранилища.**

Вариант - 1: Максимальное удовлетворение ирригационных требований
(ирригационный режим управления Кайраккумским водохранилищем)

Вариант - 2: Максимизации выработки электроэнергии в межвегетационный период
(энергетический режим управления Кайраккумским водохранилищем);

Таблица 3 (за 1998 г.)

Месяцы	Объем вдхр-ща (км.куб)		Фактический расход из водохранилища (км.куб)	
	Вариант - 1	Вариант - 2	Вариант - 1	Вариант - 2
апрель	3,414	1,535	1,16	0,465
май	3,414	2,358	1,58	0,312
июнь	3,414	3,272	1,844	0,233
июль	2,904	3,414	1,303	1,185
август	2,086	3,128	0,844	1,665
сентябрь	2,13	3,414	0,694	0,417
Итого за вегетацию			7,425	4,277
октябрь	1,982	3,414	1,494	0,981
ноябрь	1,263	3,365	2,461	1,752
декабрь	0,804	3,414	2,797	2,352
январь	3,075	3,414	2,186	2,209
февраль	3,345	3,11	2,235	2,373
март	3,168	2,512	2,202	2,487
Итого за межвегетацию			13,375	12,154
ИТОГО:			20,8	16,431

Вариант-1:

Общая выработка: 745.72 мВт.ч

Межвег-выработка: 448.80мВт.ч

Вегет-выработка: 296.92мВт.ч.

Вариант-2:

Общая выработка: 829.42мВт.ч

Межвег-выработка: 627.46 мВт.ч

Вегет-выработка: 201.96 мВт.ч.

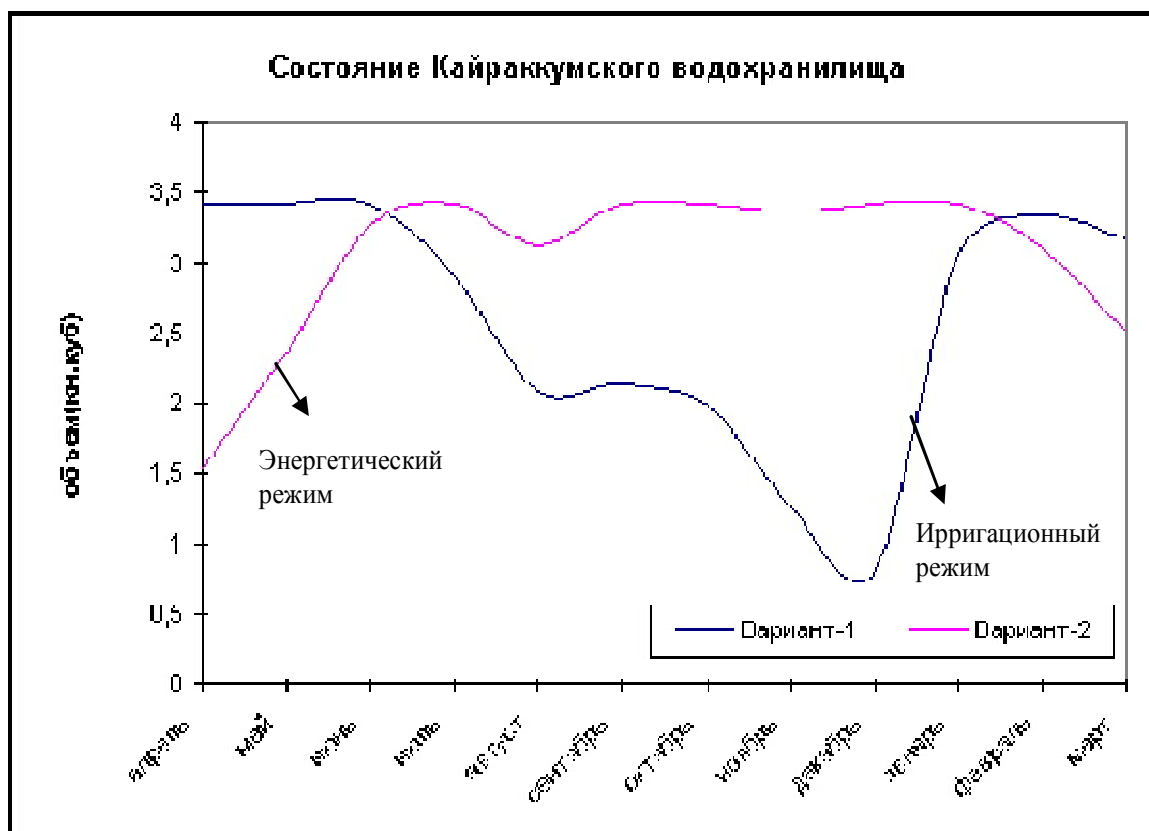


Рис. 17.

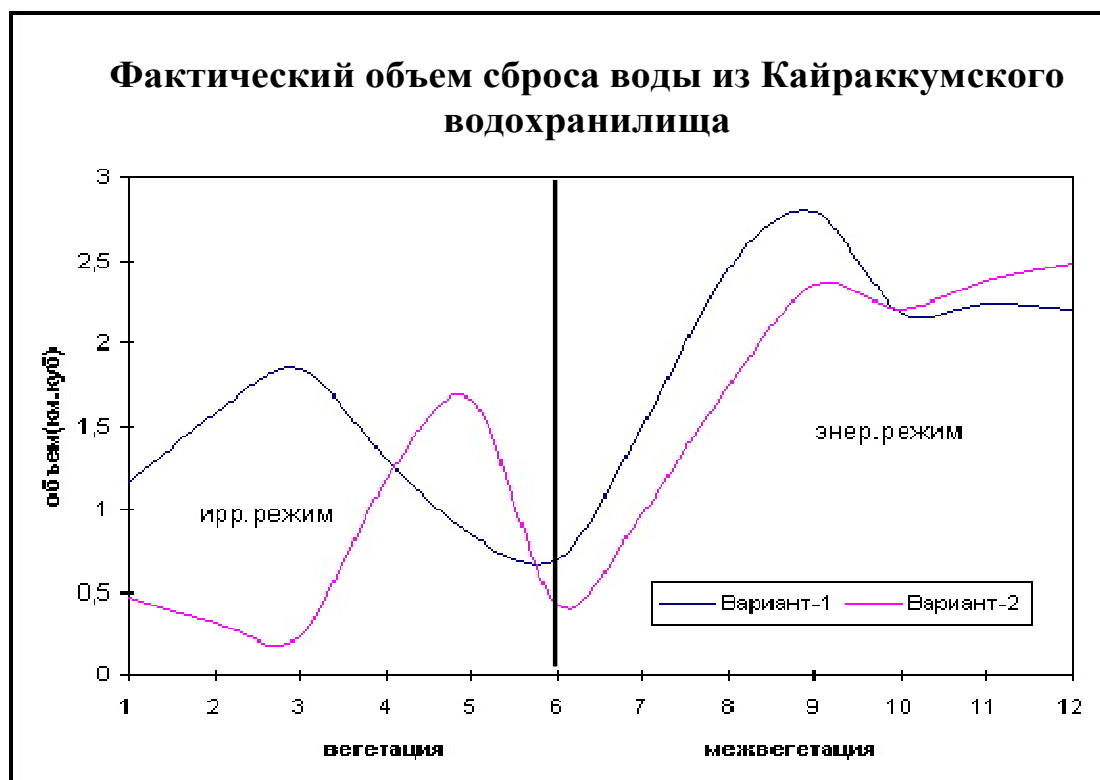


Рис.18.

**Оптимизационная модель верхнего
течения трансграничного бассейна реки Сырдарья
(для среднемноголетнего стока)**

Таблица 4

№ п.п.	Сток	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Всего/ средний	Всего за вегетац
1	Прогноз водного стока. Приток к Токтогульскому водохранилищу														
	W, млн.м³	405	436	502	631	1457	1683	2038	1357	663	614	550	512	10848	7829
	Q, м³/сек	154	166	191	240	554	640	775	516	252	233	209	195	344	
2	Агрегированный приток-забор на участке от Токтогульского до Кайраккумского водохранилища														
	W, млн.м³	176	212	232	279	383	388	315	242	222	208	192	186	3035	1829
	Q, м³/сек	67	81	88	106	146	148	120	92	84	79	73	71	96	
3	Агрегированная потребность на воду для Казахстана и Узбекистана в створе Кайраккумского водохранилища														
	W, млн.м³	473	657	789	1184	1710	1841	2100	1973	1315	789	526	526	13883	10123
	Q, м³/сек	180	250	300	450	650	700	798	750	500	300	200	200	440	
4	Национальный режим Кыргызстана для Токтогульского водохранилища (условный)														
	W, млн.м³	904	904	904	904	904	904	904	904	904	904	904	904	10848	5424
	Q, м³/сек	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	
5	Приток к Кайраккумскому водохранилищу														
	W, млн.м³	1080	1116	1136	1183	1287	1292	1219	1146	1126	1112	1096	1090	13883	7253
	Q, м³/сек	411	424	432	450	489	491	463	436	428	423	417	414	440	

6	Национальный режим Таджикистана для Кайраккумского водохранилища														
	W, млн.м ³	1455	1453	1453	1453	694	694	694	694	694	1532	1532	1535	13883	4923
	Q, м ³ /сек	553	552	552	552	264	264	264	264	264	583	583	584	440	
7	Дефицит воды на ирригацию в вегетационный период														
	W, млн.м ³					1016	1147	1406	1279	621				5469	5469
	Q, м ³ /сек					386	436	535	486	236				173	
8	Ирригационное регулирование Кайраккумского водохранилища														
	W, млн.м ³	740	740	740	1184	1710	1841	2100	1973	1046	603	603	603	13883	9854
	Q, м ³ /сек	281	281	281	450	650	700	798	750	398	229	229	229	440	
9	Объем услуг по регулированию, осуществляемых Кайраккумским водохранилищем														
	W, млн.м ³					1016	1147	1406	1279	352				5200	5200
	Q, м ³ /сек					386	436	535	486	134				165	
10	Ирригационное регулирование Токтогульским водохранилищем														
	W, млн.м ³	904	904	904	904	904	904	904	904	1174	814	814	814	10848	5694
	Q, м ³ /сек	344	344	344	344	344	344	344	344	446	310	310	310	344	
11	Объем услуг по регулированию, осуществляемых Токтогульским водохранилищем														
	W, млн.м ³					0	0	0	0	269				269	269
	Q, м ³ /сек					0	0	0	0	102				102	

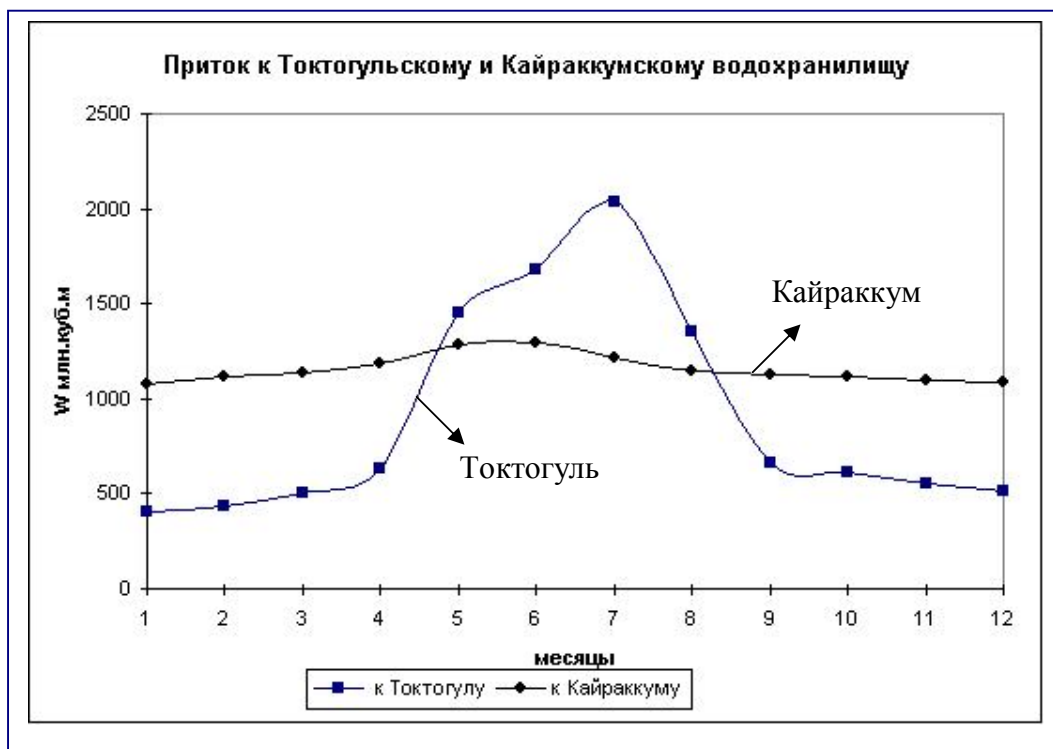


Рис.19.



Рис.20.

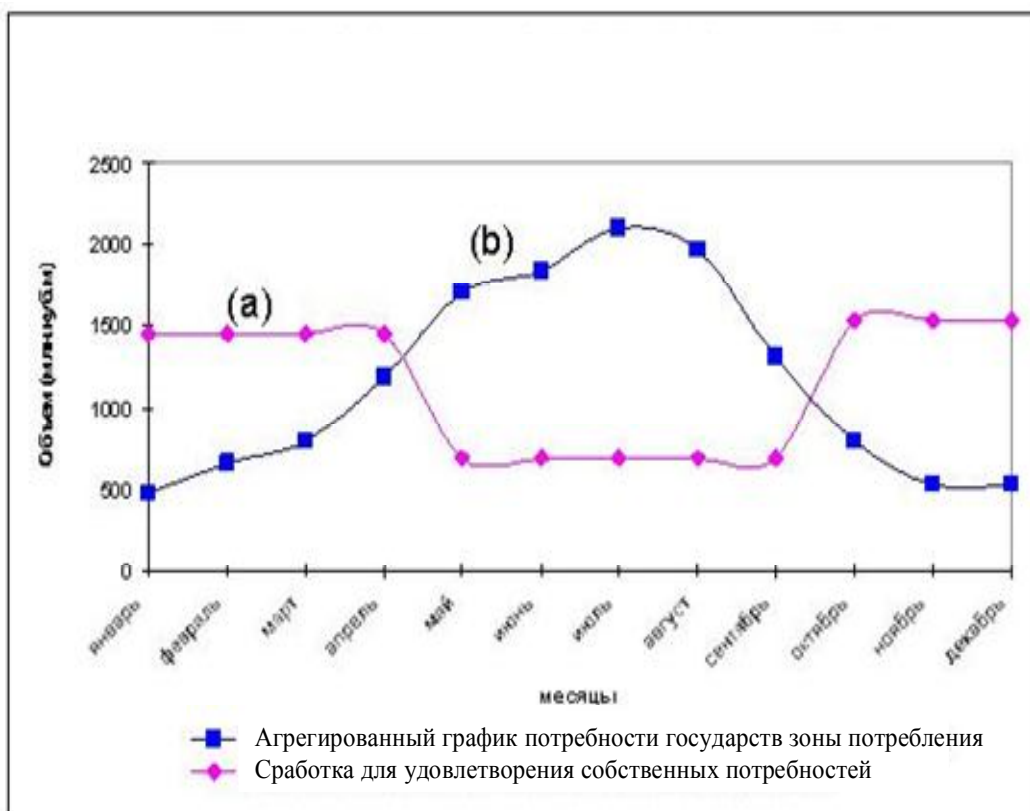


Рис. 21. Сопоставление потребностей государств зоны потребления.

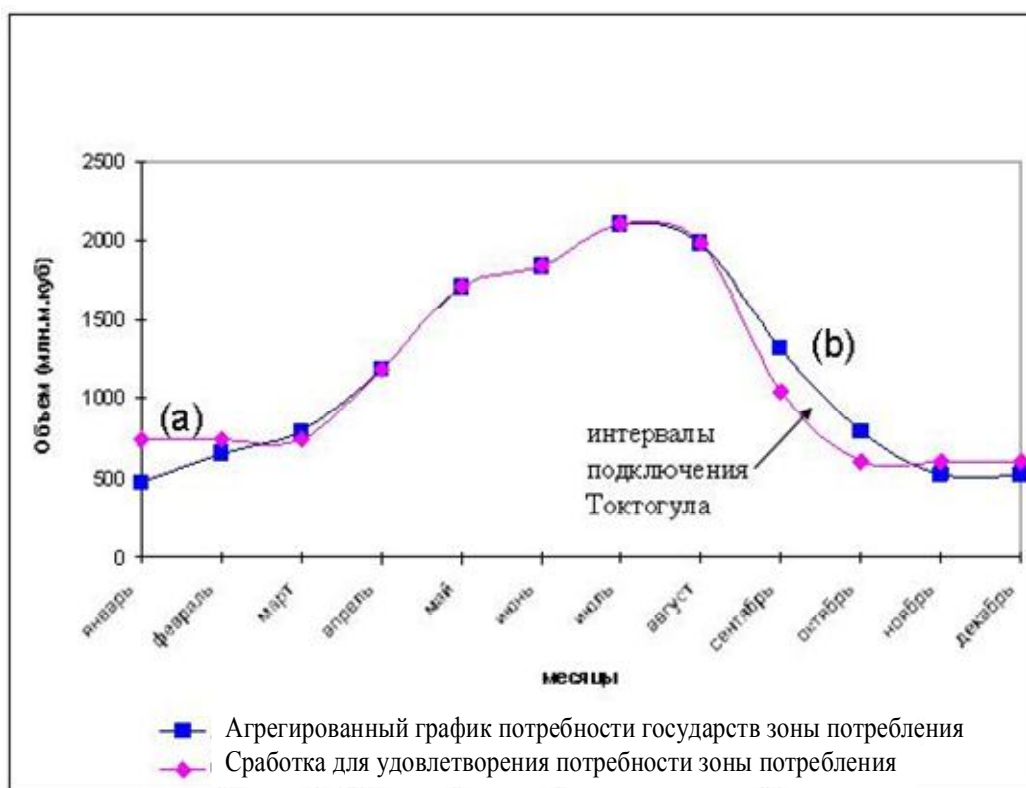


Рис. 22. Управление потребностей зоны потребления.

2.3. Имитационные модели управления водохранилищами

Данный параграф монографии посвящен разработке методики автоматизированного построения диспетчерских правил управления линейным каскадом водохранилищ комплексного назначения в бассейне трансграничной реки. Основные характеристики скопированы с реального водохозяйственного объекта - Вахско-Амударь-инского каскада водохранилищ, расположенных в бассейне р.Вахш (Таджикистан) и р.Амударьи (Узбекистан).

Трансграничный бассейн обеспечивает водой сельскохозяйственное производство, а также вырабатывает электроэнергию в гидроузлах. Объем воды, требуемой в каждом пункте забора и в каждом месяце года, фиксирован, а ирригационным критерием является надежность (частота) удовлетворения этих требований, называемая в водохозяйственной практике обеспеченностью. В качестве энергетического критерия принят уровень гарантированной суммарной мощности, которую могут обеспечить ГЭС каскада. При этом в первую очередь удовлетворяются нужды сельского хозяйства и лишь при выполнении этого условия рассматривается возможность увеличения выработки электроэнергии.

Постановка задачи. Рассматривается совокупность из n лет, занумерованных индексом $k=1,2,...,n$. Каждый год разбит на T интервалов с текущим индексом t , $t=\overline{1,T}$; в тестовых расчетах принималось $n=43$, $T=12$. Упрощенная схема каскада, используемая при расчетах, изображена на рис. 18. Каскад включает в себя три крупных водохранилищ - Рогунское, Нурекское и Туямуюнское. Рогун и Нурек принадлежат Республике Таджикистан, а Туямуюн - Республике Узбекистан.

Если раньше (в бытность СССР) в отношении управления этих водохранилищ не возникало ни каких проблем, то сейчас вопрос приобретает межгосударственный характер. Если не будет подготовлена соответствующая почва для урегулирования противоречий по отношению к использованию водных ресурсов Амударьинского бассейна, то потом ситуация может развиваться по тому же сценарию, который сейчас наблюдается в трансграничном бассейне реки Сырдарьи, когда Кыргызстан может менять правила регулирования своего водохранилища.

В принципе, Таджикистан может выбрать один из 2-х режимов управления каскадом водохранилищ на р. Вахш:

- удовлетворить потребности Узбекистана в орошении, при этом довольствоваться тем объемом электроэнергии, который будет выработан;
- выработать максимально возможный объем электроэнергии для собственных нужд, при этом будет ущемлены интересы Узбекистана в орошении.

Несмотря на то, что ни один из режимов не приемлем двум государствам одновременно, компромисс интересов возможен: Таджикистан удовлетворяет потребности Узбекистана в орошении, а Узбекистан в таком случае компенсирует потери Таджикистана в недополучении электроэнергии соответствующего объема.

Цель настоящей главы состоит в исчерпывающем описании компромисса государств с противоречивыми интересами, которая проявляется в режимах управления каскадом водохранилищ.

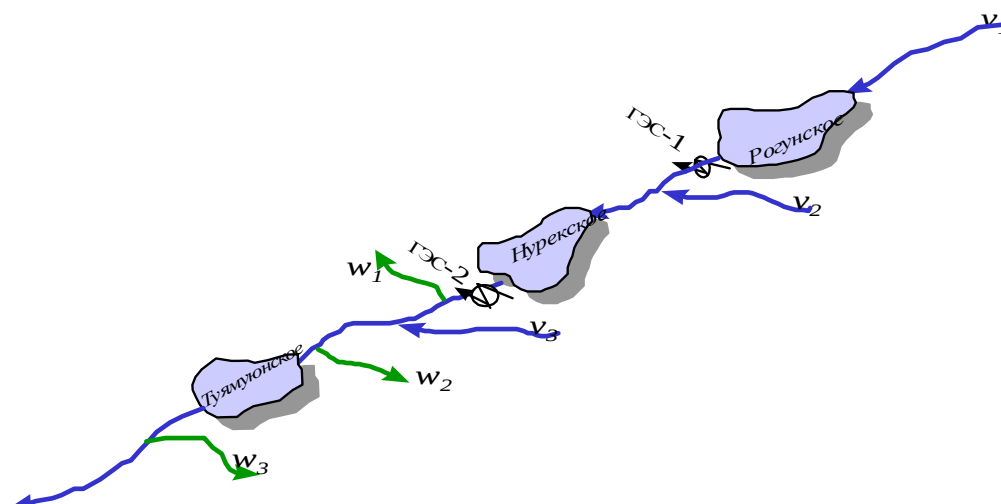


Рис.23. Упрощенная схема Вахшско-Амударинского каскада водохранилищ.

Динамика состояния каскада водохранилищ описывается следующими балансовыми соотношениями:

$$\begin{cases} x_1^k(t+1) = x_1^k(t) + v_1^k(t) - u_1^k(t), \\ x_2^k(t+1) = x_2^k(t) + v_2^k(t) + u_1^k(t) - u_2^k(t), \\ x_3^k(t+1) = x_3^k(t) + v_3^k(t) + u_2^k(t) - w_1^k(t) - w_2^k(t) - u_3^k(t), \end{cases} \quad (2.97)$$

$$\begin{cases} x_i^{k+1}(1) = x_i^k(T+1), \quad i = \overline{1,3}, \quad k = 1,2,\dots,n-1, \\ x_i^1(1) = x_i^+, \quad i = \overline{1,3}, \\ v_i^k(t) \geq 0, \quad u_i^k(t) \geq 0, \quad w_j^k(t) \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad t = 1,2,\dots,T, \end{cases} \quad (2.98)$$

$$\begin{cases} u_2^k(t) \geq w_1^k(t), \\ u_2^k(t) - w_1^k(t) + v_3^k(t) \geq w_2^k(t), \\ u_3^k(t) \geq w_3^k(t), \end{cases} \quad (2.99)$$

$$x_i^- \leq x_i^k(t) \leq x_i^+, \quad i = \overline{1,3}, \quad (2.100)$$

где $x_i^k(t)$ - наполнение i -го водохранилища к началу интервала t года k ; $v_i^k(t)$ - приток воды к i -му водохранилищу за интервал t года k ; $u_i^k(t)$ - расход (отдача) воды из i -го водохранилища за интервал t в году k ; $w_j^k(t)$ - расход, отводимый для удовлетворения нужд ирригации в j -м створе за интервал t года k . Нормы расхода воды заданы в виде значений $\bar{u}_j^l = \{u_j^l(t), t=1,2,\dots,T\}$, $l=1,2$, $j=\overline{1,3}$, причем для всякого интервала t выполнены неравенства $\bar{u}_j^1 \geq \bar{u}_j^2 \geq 0$, $j=\overline{1,3}$, где $\bar{u}_j^2 = \alpha \cdot \bar{u}_j^1$, α - коэффициент снижения. Выбатываемая мощность $N_i^k(t)$, $i=1,2$, определяется по формуле

$$N_i^k(t) = \min \left\{ N_i^{ycm}, \quad v \cdot u_i^k(t) \cdot H_i(\bar{x}_i^k(t), u_i^k(t)) \right\}, \quad (2.101)$$

где N_i^{ycm} - установленная мощность на i -й станции каскада; v - коэффициент энерговыработки, $\bar{x}_i^k(t) = \frac{x_i^k(t+1) + x_i^k(t)}{2}$. Здесь функция

H - напор ГЭС - монотонно возрастает по $\bar{x}^k(t)$ и монотонно убывает по $u^k(t)$.

$N^k(t) = N_1^k(t) + N_2^k(t)$, $t=1,2,\dots,T$, $k=1,2,\dots,n$, - суммарная мощность, вырабатываемая на первых двух ГЭС. Имеется также два уровня гарантированной суммарной мощности по каскаду

$$\bar{N}_\Gamma^l = \{\bar{N}_\Gamma^l(t), \quad t=1,2,\dots,T\}, \quad l=1,2,$$

причем для всякого t выполнено $\bar{N}_\Gamma^1 \geq \bar{N}_\Gamma^2 \geq 0$. Здесь $\bar{N}_\Gamma^1(t) = \beta \cdot \eta(t)$, $\eta(t)$ - некоторый заданный график суммарной мощности по всему каскаду, β - уровень суммарной мощности (критериальный показатель); $\bar{N}_\Gamma^2(t) = \gamma \cdot \bar{N}_\Gamma^1(t)$, γ - коэффициент снижения. Сниженные нормы отдачи, как для ирригации, так и для энергетики, должны выполняться во всех интервалах рассматриваемого гидрологического ряда. Степень удовлетворения требований будем оценивать по их обеспеченности.

Определение. Обеспеченность величины $\bar{u}_j^{-l}(t)$ есть доля интервалов t в ряду $\{t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n\}$, для которых выполняется ограничение

$$w_j^k(t) \geq \bar{u}_j^{-l}(t), \quad j = \overline{1, 3}, \quad l = 1, 2, \quad (2.102)$$

Аналогично, обеспеченность величины $\bar{N}_\Gamma^{-l}(t)$ есть доля интервалов t в ряду $\{t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n\}$, для которых выполняется ограничение

$$N^k(t) \geq \bar{N}_\Gamma^{-l}(t), \quad l = 1, 2. \quad (2.103)$$

Тогда обеспеченность величин $\bar{u}^{-l}$ и $\bar{N}_\Gamma^{-l}$ определяется по формулам

$$\left\{ \begin{aligned} P_{\bar{u}^{-l}} &= \frac{|\tau_{\bar{u}^{-l}}|}{n \cdot T + 1}, \quad \tau_{\bar{u}^{-l}} = \left\{ (t, k) \mid w_j^k(t) \geq \bar{u}_j^{-l}(t), \quad j = \overline{1, 3} \right\} \\ P_{\bar{N}_\Gamma^{-l}} &= \frac{|\tau_{\bar{N}_\Gamma^{-l}}|}{n \cdot T + 1}, \quad \tau_{\bar{N}_\Gamma^{-l}} = \left\{ (t, k) \mid N^k(t) \geq \bar{N}_\Gamma^{-l}(t), \quad l = 1, 2. \right\} \end{aligned} \right. \quad (2.104)$$

где n - число лет в ряду, T - число интервалов в году.

Система критериев $\{P_{\bar{u}^{-l}}, P_{\bar{N}_\Gamma^{-l}}\}$, $l = 1, 2$, позволяет сравнивать различные реализации отдач при заданной приточности.

Класс управления. Класс допустимых правил регулирования водохранилищ задан условиями независимости попуска u в момент t года k от предыстории процесса.

Предполагаем, что в начале интервала t поступает точная информация (прогноз) о реализации $v(t)$ на интервале t . Тогда попуск $u \geq 0$ формируется в зависимости от номера t , наполнения $x(t)$ водохранилища к началу интервала t и реализации $v(t)$. Итак, класс допустимых управлений $\mathcal{U}$ есть множество позиционных стратегий с прогнозом случайного фактора на один интервал $u = \{u(t, x(t), v(t))\}$.

Рассмотрим частный случай позиционных стратегий - диспетчерские правила управления. Функционирование водохранилища согласно диспетчерским правилам управления выглядит следующим образом.

Определим функцию

$$r(x', x, x'') = x + \max(0, x' - x) + \min(0, x'' - x). \quad (2.105)$$

Это кусочно-линейная функция, график которой приведен на рис.24. Для конкретного момента времени t рассмотрим значение диспетчера $d(t)$, удовлетворяющего условию $x^- \leq d(t) \leq x^+$. Введем обозначения:

$$y_1(t) = x(t) + v(t) - \bar{u}^1(t),$$

$$y_2(t) = x(t) + v(t) - \bar{u}^2(t),$$

где $\bar{u}^i(t)$, $i=1,2$, – полная и сниженная ирригационные нормы отдачи.

Так как $\bar{u}^1(t) \geq \bar{u}^2(t)$, то очевидно, что $y_1(t) \leq y_2(t)$. Тогда, согласно (2.87) определим значения Y :

$$Y = r(x^-, r(y_1(t), d(t), y_2(t)), x^+) \quad (2.106)$$

Введем обозначения

$$u^+(t) = x(t) + v(t) - x^+, \quad u^-(t) = x(t) + v(t) - x^-, \quad u_d(t) = x(t) + v(t) - d(t).$$

Очевидно, что $u^+(t) \leq u_d(t) \leq u^-(t)$. Тогда попуск определяется равенством

$$U = r(u^+(t), r(\bar{u}^2(t), u_d(t), \bar{u}^1(t)), u^-(t)). \quad (2.107)$$

Следовательно, функционирование водохранилища, согласно диспетчерским правилам управления, однозначно определяется формулами (2.106) и (2.107): формула (2.106) задает состояние водохранилища в момент t , а формула (2.107) – необходимый попуск из водохранилища.

На рис. 25 приведен характерный вид внутригодовой динамики изменения наполнения водохранилища в зависимости от одной заданной диспетчерской линии $d(t)$.

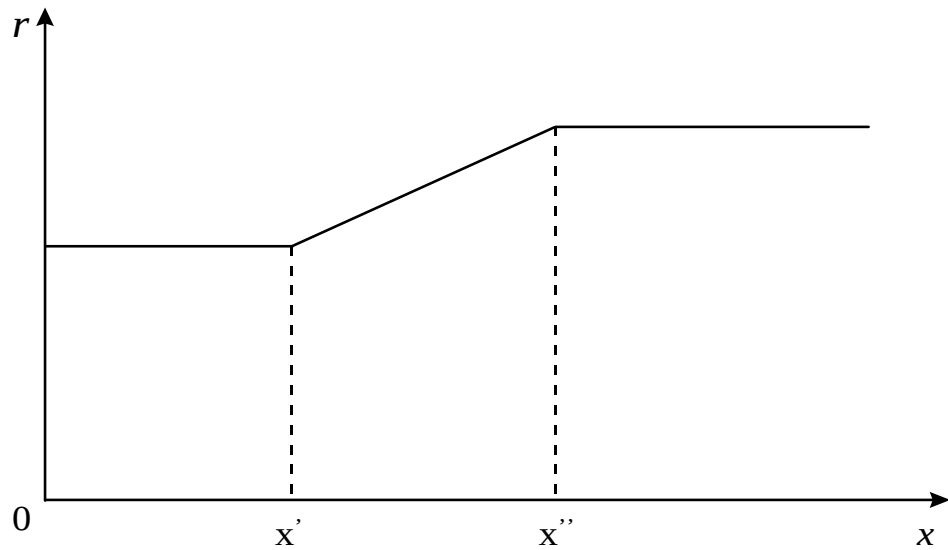


Рис.24. Кусочно-линейная функция $r(x', x, x'')$.

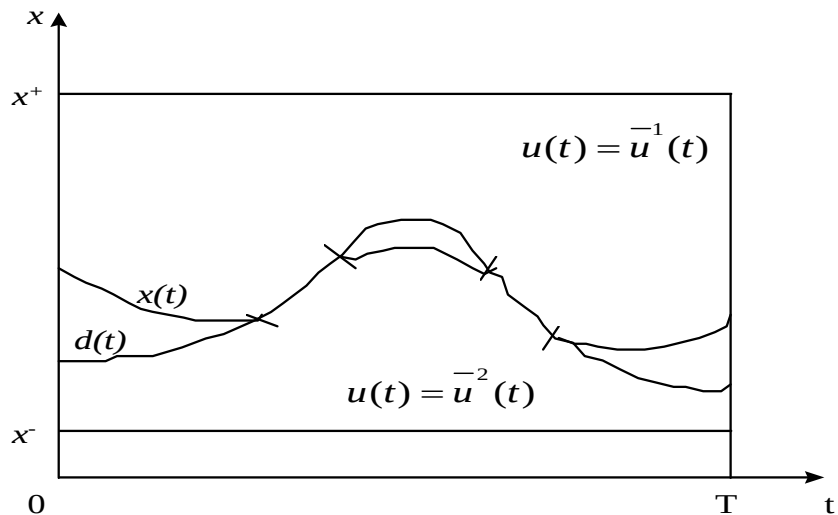


Рис.25. Характерный вид внутригодовой динамики изменения наполнения водохранилища.

Сформулируем три задачи, которые будут решаться последовательно.

Ирригационная задача (А). Требуется найти такое правило управления водохранилищами каскада, чтобы обеспеченность удовлетворения полной ирригационной нормы отдачи была максимальной, при условии, что сниженная ирригационная норма отдачи выполняется для всех интервалов рассматриваемого ряда.

Иными словами, требуется

$$P_{-l} \Rightarrow \max_u \quad (2.108)$$

при выполнении условий (2.97)-(2.100) и ограничений

$$\begin{cases} u_1^k(t) \geq u_1^{\min}(t), \\ w_1^k(t) \leq u_2^k(t) - u_2^{\min}(t), \\ w_2^k(t) \leq u_2^k(t) - w_1^k(t) + v_3^k(t) - u_2^{\min}(t), \\ w_3^k(t) \leq u_3^k(t) - u_3^{\min}(t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.109)$$

где $u_i^{\min}(t)$ – необходимый минимальный попуск из i -го водохранилища за интервал t . Должно выполняться также критериальное ограничение

$$w_j^k(t) \geq \bar{u}_j^2(t), \quad j = \overline{1,3}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.110)$$

Решение задачи (2.108)-(2.110) ищется в *классе диспетчерских правил управления*. При решении **задачи А** рассматривается совместное функционирование первых двух водохранилищ каскада, то есть вместо них рассматривается одно водохранилище с полезной емкостью, равной сумме емкостей первого и второго водохранилища (о многокритериальных ирригационных задачах для одиночного водохранилища в этом классе управлений подробно см. [Агасандян, 1983; 1985]). С другой стороны, такая схема упрощения вполне допустима, так оба водохранилища территориально принадлежат Республике Таджикистан и, естественно, вполне достаточно оценить тот объем воды, который направляется для удовлетворения ирригационных требований нижерасположенных государств Центральной Азии, тем более что наши собственные ирригационные требования удовлетворяются автоматически.

Пусть найдено решение **задачи А**, то есть значение функционала (2.108) равно $P_{\bar{u}^{-1}} = P_{\bar{u}^{-1}}^{\max}$. Рассмотрим две постановки ирригационно-энергетической задачи.

Первая ирригационно-энергетическая задача (В). На множестве решений **задачи А** и при фиксированном правиле распределения регулирующих функций между водохранилищами (которое подробно описывается далее) требуется найти такое правило управления каскадом водохранилищ, которое максимизирует уровень суммарной гарантированной мощности, при условии выполнения сниженного энергетического требования для всех интервалов в ряду.

Иными словами, требуется

$$\beta \Rightarrow \max \quad (2.111)$$

при выполнении условий (2.97)-(2.100), (2.108)-(2.110) и ограничений

$$P_{u^{-1}} \geq P_{u^{-1}}^{\max}, \quad (2.112)$$

$$N^k(t) \geq \overline{N}_r^2(t), \quad (2.113)$$

где $\overline{N}_r^2(t) = \gamma \cdot \beta \cdot \eta(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$

Пусть найдено максимальное значение критериального показателя $\beta = \beta^{\max}$ такое, что ограничение (2.113) выполняется для всех интервалов в ряду. Тогда вторая задача формулируется следующим образом.

Вторая ирригационно-энергетическая задача (С). На множестве решений задачи В требуется максимизировать обеспеченность выполнения полной гарантированной суммарной мощности: $\overline{N}_r^1(t) = \beta^{\max} \cdot \eta(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$.

Таким образом, требуется

$$P_{\overline{N}_r^1} \Rightarrow \max \quad (2.114)$$

при выполнении ограничений (2.97)-(2.100), (2.108)-(2.110) и (2.111)-(2.113), а также при $\beta = \beta^{\max}$ из решения задачи В.

Регулирующая функция. Распределение регулирующих функций между водохранилищами является самостоятельной задачей [Резниковский, Рубинштейн, 1974]. Здесь при решении обеих ирригационно-энергетических задач принимается следующее фиксированное правило (задаче В соответствует $l=2$, задаче С - $l=1$):

- а) для удовлетворения нужд ирригации сначала срабатывает второе водохранилище. В те интервалы времени t , когда полезной емкости второго гидроузла не хватает, дополнительно срабатывает первое водохранилище сверх ппуска $u_1^{\min}(t)$. Если при найденных таким образом ппусках $\tilde{u}_1^k(t)$ и $\tilde{u}_2^k(t)$ ограничение на суммарную мощность (2.16) не выполняется, то ппуски корректируются по следующим правилам (см. правила б)).
- б) для выполнения ограничения на суммарную мощность сначала срабатывает первое водохранилище до тех пор, пока позволяет его полезная емкость. В тех случаях, когда полезной емкости первого гидроузла не хватает, дополнительно срабатывает второе водохранилище

сверх первоначально найденного ппуска $\tilde{u}_2^k(t)$ (если это позволяет ограничение, накладываемое диспетчерскими правилами). При этом соблюдаются следующие условия:

1⁰. Соотношение $u_1^k(t) > \tilde{u}_1^k(t)$ выполняется только тогда, когда

$$N_1^k(t) + N_2^k(t) = \bar{N}_r^l(t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2⁰. Соотношение $u_2^k(t) > \tilde{u}_2^k(t)$ выполняется только тогда, когда $N_1^k(t) + N_2^k(t) = \bar{N}_r^l(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, $k = 1, 2, \dots, n$, и при этом либо $x_1^k(t) = x_1^-$, либо $x_2^k(t) = x_2^+$, $t = 1, 2, \dots, T$, $k = 1, 2, \dots, n$, где $\tilde{u}_i^k(t)$, $i = 1, 2$ – ппуски, найденные при решении задачи А.

Пункт б) далее более подробно конкретизируется при решении задачи В. Это фиксированное правило распределения регулирующих функций между водохранилищами полностью совпадает с результатами, полученными нами при аналитическом исследовании, приведенном во второй главе данного учебника.

Метод решения ирригационной задачи. При решении ирригационной задачи рассматривается совместное функционирование первых двух водохранилищ каскада. Это возможно потому, что, во-первых, отсутствует верхнее ограничение на ппуск из первого водохранилища, во-вторых, в модели не учитывается время добегания, то есть динамические составляющие емкостей водохранилищ и, в-третьих, в нижнем бьефе первого водохранилища отсутствуют ирригационные требования. Кроме того, ппуск из второго водохранилища $u_2^{\min}(t)$ всегда больше боковой приточности к нему.

Диспетчерские графики строятся в расчете на суммарный объем воды в этих водохранилищах. Для упрощения обозначим через $u_l(t)$, $l = 1, 2$, соответственно полную и сниженную ирригационную норму отдачи в k -ом году за t -й интервал времени в нижнем бьефе объединенного водохранилища. Далее описывается процедура нахождения $u_l(t)$, $l = 1, 2$.

Динамика состояния объединенного водохранилища описывается следующими балансовыми соотношениями:

$$x^k(t+1) = x^k(t) + v^k(t) - u^k(t) \quad (2.115)$$

$$\begin{cases} x^k(t) = x_1^k(t) + x_2^k(t) \\ v^k(t) = v_1^k(t) + v_2^k(t) \\ u^k(t) = u_2^k(t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.116)$$

$$\begin{cases} x^{k+1}(1) = x^k(T+1), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ x^1(1) = x^+ \\ v^k(t) \geq 0, \quad u^k(t) \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.117)$$

$$x^- \leq x^k(t) \leq x^+, \quad (2.118)$$

где $x^- = x_2^-$; $x^+ = x_1^+ + x_2^+ - x_1^-$. Смысл вводимых здесь обозначений очевиден (см. (2.97) - (2.100)).

Перед тем как приступить к процедуре нахождения диспетчерских линий для объединенного водохранилища, описываемого балансовыми соотношениями (2.105) - (2.118), сформулируем и докажем теорему о необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи **A**, которая играет центральную роль во всех далее рассматриваемых задачах.

Обозначим через $x^k(t)$ траекторию, построенную прямым ходом для $t = 1, 2, \dots, T$, $k = 1, 2, \dots, n$ при $x^1(1) = x^+$ с отдачей $\overset{=k}{u}_2(t)$ в соответствии с балансовыми соотношениями (2.105), (2.107), которая определяется по формуле

$$x^k(t+1) = \min \left(x^+, \quad x^k(t) + v^k(t) - \overset{=k}{u}_2(t) \right). \quad (2.119)$$

Затем для $t = T, T-1, \dots, 1$, $k = n, n-1, \dots, 1$ при $\bar{x}^n(T+1) = x^n(T+1)$, где $x^n(T+1)$ – конец траектории $x^k(t)$, вычисленной по формуле (2.101), ходом назад с отдачей $\overset{=k}{u}_2(t)$ вычислим

$$\bar{x}^k(t) = \max \left(x^-, \quad \bar{x}^k(t+1) - v^k(t) + \overset{=k}{u}_2(t) \right). \quad (2.120)$$

Получим траекторию $\bar{x}^k(t)$ с отдачей $u^k(t) \geq \overset{=k}{u}_2(t)$ для ряда $\{t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 5. Для разрешимости задачи **A** необходимо и достаточно, чтобы при любых t и k выполнялось неравенство

$$\bar{x}^k(t) \leq x^+, \quad \forall t, k. \quad (2.121)$$

Доказательство. а) *Необходимость.*

Пусть задача **A** разрешима, то есть для всех $t = 1, 2, \dots, T$, $k = 1, 2, \dots, n$, выполнено неравенство

$$x^k(t) \geq x^-. \quad (2.122)$$

Пусть при $t \leq \tau \leq T$ выполняется неравенство:

$$x^- \leq x^k(\tau) + v^k(\tau) - u_2(\tau) \stackrel{=k}{\leq} x^+.$$

Покажем, что тогда

$$\bar{x}^k(t) = x^k(t). \quad (2.123)$$

Рассмотрим траекторию $x^k(t)$ при $t = T$, $k = n$

$$x^n(T+1) = x^n(T) + v^n(T) - u_2(T) \stackrel{=n}{\leq} x^+.$$

Тогда, просматривая траектории $x^k(t)$ и $\bar{x}^k(t)$ ходом назад, начиная с конца траектории $x^k(t)$, т.е. $\bar{x}^n(T+1) = x^n(T+1)$, получим

$$\bar{x}^n(T) = \bar{x}^n(T+1) - v^n(T) + u_2(T) \stackrel{=n}{=} x^n(T+1) - v^n(T) + u_2(T) \stackrel{=n}{=} x^n(T) \leq x^+.$$

Аналогично продолжая эту процедуру, получим равенство (2.123).

Итак, равенство (2.123) нарушается первый раз лишь тогда, когда в (2.119) реализуется случай

$$x^k(t) + v^k(t) - u_2(t) \stackrel{=k}{>} x^+. \quad (2.124)$$

В этом случае покажем, что для $t = 1, 2, \dots, T$, $k = 1, 2, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\bar{x}^k(t) \leq x^k(t). \quad (2.125)$$

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \bar{x}^k(t) &= \max(x^-, \bar{x}^k(t+1) - v^k(t) + u_2(t)) \stackrel{=k}{=} \left| \begin{array}{l} \text{из (3.27) имеем:} \\ \bar{x}^k(t+1) = x^k(t+1) = x^+ \end{array} \right| \\ &= \max\left(x^-, x^+ - v^k(t) + u_2(t)\right) \end{aligned} \quad (2.126)$$

Рассмотрим два случая в (2.126):

I. Пусть $x^+ - v^k(t) + u_2(t) \stackrel{=k}{\geq} x^-$, тогда из (2.124) получим

$$\bar{x}^k(t) = x^+ - v^k(t) + u_2(t) \stackrel{=k}{<} x^k(t).$$

II. Пусть $x^+ - v^k(t) + u_2(t) \stackrel{=k}{<} x^-$, тогда в (2.126) реализуется максимум на

x^- , то есть $\bar{x}^k(t) = x^-$, следовательно, из (2.122) получим

$$\bar{x}^k(t) \leq x^k(t).$$

Остался случай, когда в (2.120) реализуется максимум на X^- : $\bar{x}^k(t) = x^-$. В этом случае также выполняется (2.125), так как в начале предполагалось, что **задача А** разрешима.

Таким образом, для ряда $\{t = 1, 2, \dots, T, k = 1, 2, \dots, n\}$ при выполнении условий $\bar{x}^n(T+1) = x^n(T+1)$ справедливо неравенство (2.111), что и требовалось доказать.

Необходимость доказана.

б) *Достаточность*. Пусть для $t = 1, 2, \dots, T, k = 1, 2, \dots, n$, то есть для $t = 1, 2, \dots, T, k = 1, 2, \dots, n$, выполняется неравенство (2.112), то есть

$$x^k(t) \geq x^-.$$

Предположим противное, а именно, пусть найдется $t = t^*$ и $k = k^*$, при которых выполняется неравенство

$$x^{k^*}(t^*) < x^-. \quad (2.127)$$

Просматриваем траектории $x^k(t)$ и $\bar{x}^k(t)$ ходом назад, начиная с конца траектории $x^k(t)$, т.е. $\bar{x}^n(T+1) = x^n(T+1)$. При этом траектория $\bar{x}^k(t)$ совпадает с траекторией $x^k(t)$ лишь на том участке, где минимум в (2.101) достигается в пределах:

$$x^- \leq x^k(t+1) \leq x^+.$$

Согласно (2.127), имеем:

$$x^{k^*}(t^*) = x^{k^*}(t^*+1) - v^{k^*}(t^*) + u_2^{=k^*}(t^*) < x^-. \quad (2.128)$$

Тогда из (2.120) получим

$$\begin{aligned} \bar{x}^{k^*}(t^*) &= \max \left(x^-, \bar{x}^{k^*}(t^*+1) - v^{k^*}(t^*) + u_2^{=k^*}(t^*) \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{в момент } t^*+1 \text{ имеем:} \\ \bar{x}^{k^*}(t^*+1) = x^{k^*}(t^*+1) \end{array} \right| = \max \left(x^-, x^{k^*}(t^*+1) - v^{k^*}(t^*) + u_2^{=k^*}(t^*) \right). \end{aligned}$$

Здесь возможен только один случай, а именно:

$$x^{k^*}(t^*+1) - v^{k^*}(t^*) + u_2^{=k^*}(t^*) < x^-.$$

Тогда в (2.120) максимум реализуется на X^- , то есть $\bar{x}^{k^*}(t^*) = x^-$, а из (2.128) получим

$$\bar{x}^{k*}(t^*) > x^{k*}(t^*). \quad (2.129)$$

Здесь и далее интервал t в году k обозначен через (k, t) .

Рассмотрим момент $(k', t') < (k^*, t^*)$, где при просмотре траектории $x^k(t)$ ходом назад по формуле (2.129) минимум реализовался на X^+ , то есть

$$x^{k'}(t') = x^+ \quad (2.130)$$

Следовательно, из (2.129) и (2.130) получим: $\bar{x}^{k'}(t') > x^{k'}(t') = x^+$, что противоречит выполнению неравенства (2.111). Таким образом, предположение о выполнении (2.127) неверно и тем самым **задача А разрешима. Т е о р е м а полностью доказана.**

Рассмотрим процедуру нахождения двух диспетчерских линий: $d_1(t)$ и $d_2(t)$. Верхняя линия $d_1(t)$ задает границу между зонами избытков и зоной полной ирригационной отдачи, идея построения которой изложена в [Агасандян, 1983;1984;1985;1986; Коробова, Пойзнер, Меньшиков, Чабан, 1986], а нижняя линия задает границу между зонами полной и сниженной ирригационной отдачи.

Первый этап. На первом этапе рассмотрим построение зоны полной гарантированной отдачи, то есть выделим эту зону таким образом, чтобы при функционировании каскада выполнялось неравенство (2.118) и

$$u^k(t) \geq u_1(t). \quad (2.131)$$

Заметим, что для некоторых интервалов неравенство (2.131) может и не выполняться. В этих случаях говорят, что возникают перебойные ситуации. Верхняя граница найденной зоны полной гарантированной отдачи рассматривается в качестве значения первой диспетчерской линии $d_1(t)$. Методика построения линии $d_1(t)$ заключается в следующем.

Начиная с момента $t=T$, $k=n$, при $\tilde{x}^n(T+1) = x^-$ ходом назад с отдачей $u_1(t)$ в соответствии с балансовыми соотношениями (2.115) - (2.118) строим траекторию $\tilde{x}^k(t)$

$$\tilde{x}^k(t) = \max \left(x^-, \tilde{x}^k(t+1) - v^k(t) + u_1(t) \right) \quad (2.132)$$

до тех пор, пока

$$\tilde{x}^k(t) \leq x^+. \quad (2.133)$$

Если в некоторый момент (k', t') условие (2.133) нарушится, то на участке от (k', t') до (n, T) найдем ближайший к моменту (k', t') момент (k_1, t_1) , когда максимум в (2.132) достигается на x^- , то есть $\tilde{x}^{k_1}(t_1) = x^-$.

В момент $(k_1, t_1 - 1)$ положим $\tilde{x}^{k_1}(t_1 - 1) = x^-$ и с этого момента от значения x^- , как от начального, ходом назад заново строим траекторию по формуле (2.132). Аналогично, при каждом нарушении условия (2.133) находим ближайший к моменту нарушения момент (k_i, t_i) , для которого выполняется $\tilde{x}^{k_i}(t_i) = x^-$. Полагаем $\tilde{x}^{k_i}(t_i - 1) = x^-$ и продолжаем строить ходом назад от момента $(k_i, t_i - 1)$ траекторию $\tilde{x}^k(t)$ по формуле (2.132). В итоге имеем траекторию $\tilde{x}^k(t)$, на которой отдача $\stackrel{=k}{u_1}(t)$ выполняется во всех интервалах, кроме интервалов $(k_i, t_i - 1)$.

Найденная траектория $\tilde{x}^k(t)$ разделяет множество всех возможных состояний водохранилища на две зоны: зону избытков и зону полной гарантированной отдачи. Верхняя огибающая отрезков траектории $\tilde{x}^k(t)$ определяет уровень первого диспетчера по формуле

$$d_1(t) = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} \tilde{x}^k(t), \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (2.134)$$

Геометрическая интерпретация методики построения линии $d_1(t)$ приведена на рис. 26.

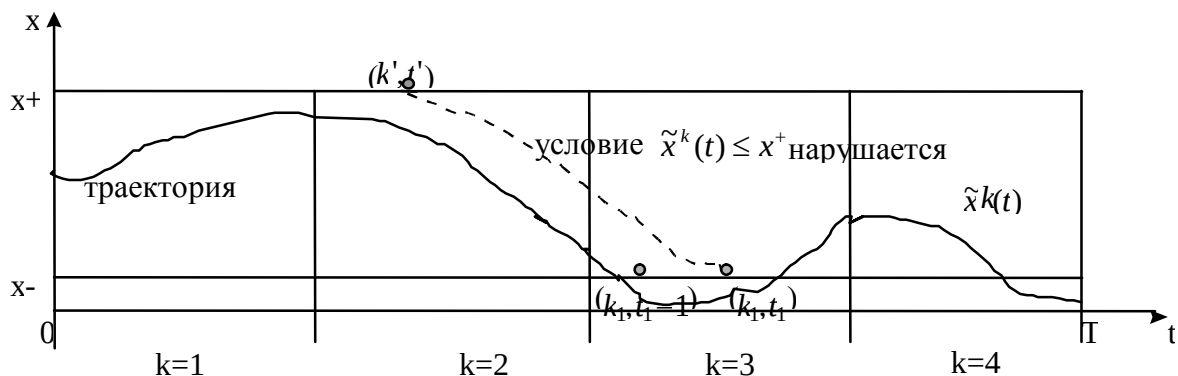


Рис.26. Геометрическая интерпретация методики построения $d_1(t)$.

Второй этап. Рассмотрим процедуру построения зоны сниженной гарантированной отдачи. Необходимо, чтобы при функционировании каскада выполнялись неравенства (2.118) и

$$u^k(t) \geq \overset{=k}{u_2(t)}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.135)$$

Методика построения зоны сниженной гарантированной отдачи для заданного гидрологического ряда $v^k(t)$ заключается в следующем.

Точно так же, как в первом этапе для $t = T, T-1, \dots, 1$, $k = n, n-1, \dots, 1$, при $\tilde{x}^n(T+1) = x^-$ ходом назад с отдачей $\overset{=k}{u_1(t)}$, в соответствии с балансовыми соотношениями (2.115) - (2.118), строим траекторию $\tilde{x}^k(t)$.

Затем для $t = T, T-1, \dots, 1$, $k = n, n-1, \dots, 1$, при $\bar{x}^n(T+1) = \tilde{x}^n(T+1) = x^-$ ходом назад с отдачей $\overset{=k}{u_2(t)}$ вычислим $\bar{x}^k(t)$ по формуле (2.120). Заметим, что такую траекторию всегда можно построить. При этом, согласно **теореме 5**, если хотя бы для одного момента (k, t) не выполняется неравенство $\bar{x}^k(t) \leq x^+$, то **задача А** неразрешима.

Сравнивая траектории $\tilde{x}^k(t)$ и $\bar{x}^k(t)$, построенные соответственно по формулам (2.132) и (2.120), имеем:

- а⁰) существуют определенные участки траектории $\tilde{x}^k(t)$, где эта траектория принимает значение x^- из-за нарушения условия (2.133) (*перебой полной отдачи*). На этих участках выделим те интервалы, где $u^k(t) < \overset{=k}{u_2(t)}$, то есть происходит перебой сниженной отдачи.
- б⁰) на каждом выделенном участке траектория $\bar{x}^k(t)$ проходит выше траектории $\tilde{x}^k(t)$, совпадая с ней лишь на правом конце участка. Условие $\bar{x}^k(t) \leq \tilde{x}^k(t)$ при движении по траектории $\bar{x}^k(t)$ ходом назад впервые выполнится в момент (k^*, t^*) , лежащий левее рассматриваемого выделенного участка.
- в⁰) в остальных случаях траектория $\bar{x}^k(t)$ проходит ниже траектории $\tilde{x}^k(t)$, либо совпадает с ней, то есть $\bar{x}^k(t) \leq \tilde{x}^k(t)$. Равенство возможно, если в (2.132) максимум реализуется на x^- , тогда и в (2.120) максимум достигается на $\overset{=k}{X^-}$, так как $\overset{=k}{u_1(t)} > \overset{=k}{u_2(t)}$.

Введем обозначения

$$\tilde{x}_*^k(t) = \begin{cases} \bar{x}^{-k}(t), & \text{если } \bar{x}^{-k}(t) > \tilde{x}^k(t) \\ x^-, & \text{если } \bar{x}^{-k}(t) \leq \tilde{x}^k(t). \end{cases} \quad (2.136)$$

Здесь $\tilde{x}_*^k(t)$ – линия переключения с полной отдачи на сниженную.

Верхняя огибающая отрезков траектории $\tilde{x}_*^k(t)$ определяет уровень второго диспетчера по формуле

$$d_2(t) = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} \tilde{x}_*^k(t), \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (2.137)$$

Геометрическая интерпретация методики построения линии $d_2(t)$ приведена на рис.27.

Зона избытков и зона сниженной отдачи строятся независимо друг от друга. Теоретически возможен случай, когда для некоторого момента t значение $d_1(t)$ окажется меньше, чем значение $d_2(t)$. В этом случае зону избытков следует сократить, увеличив соответствующие значения $d_1(t)$ до $d_2(t)$.

Справедлива следующая

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5, линии $d_1(t)$ и $d_2(t)$ определены равенствами (2.134), (2.137) соответственно траектория $\bar{x}^{=k}(t)$ построена в соответствии с первым этапом (построение зоны полной гарантированной отдачи) при начальном условии $\bar{x}^{=1}(1) = x^+$ при назначении попуска $\bar{u}_2^{=k}(t)$ ниже $d_2(t)$, $\bar{u}_1^{=k}(t)$ между $d_2(t)$ и $d_1(t)$ и произвольного попуска (не меньше $\bar{u}_2^{=k}(t)$) выше $d_1(t)$.

Тогда для всех $t = 1, 2, \dots, T$, $k = 1, 2, \dots, n$ выполнено неравенство

$$\bar{u}^{=k}(t) \geq \bar{u}_2^{=k}(t), \quad (2.138)$$

которые означают, построение зоны сниженной отдачи.

Доказательство. В соответствии с п.П (построение зоны полной гарантированной отдачи), нарушение неравенства (2.138) возможно лишь при $\bar{x}^{=k}(t+1) = x^-$. Как показано в [Коробова, Пойзнер, Меньшиков, Чабан, 1986; Чабан, 1986], при подъеме диспетчерских линий $d_1(t)$, $d_2(t)$ соответствующая траектория (при фиксированном начальном значении) во всяком случае не опускается. Следовательно, можно доказать выполнение неравенства (2.138), заменив диспетчеры $d_1(t)$, $d_2(t)$ на любые линии, расположенные не выше них. Более того, можно

рассматривать псевдодиспетчерские линии $\tilde{d}_1^k(t)$, $\tilde{d}_2^k(t)$ (зависящие не только от t , но и от k), лишь бы выполнялись неравенства $\tilde{d}_i^k(t) \leq d_i(t)$, $i=1,2$, $t=1,2,\dots,T$, $k=1,2,\dots,n$. Положим

$$\tilde{d}_2^k(t) = \tilde{x}_*^k(t); \quad \tilde{d}_1^k(t) = \max(\tilde{d}_2^k(t), \tilde{x}^k(t)).$$

Пусть $x^k(t)$ траектория с начальным условием $x^1(1) = x^+$, построенная в соответствии с п.П, при назначении попуска $\overset{=k}{u}_2(t)$ ниже $\tilde{d}_2^k(t)$, $\overset{=k}{u}_1(t)$ между $\tilde{d}_2^k(t)$ и $\tilde{d}_1^k(t)$ и произвольным попуском выше $\tilde{d}_1^k(t)$. Линия $\tilde{d}_1^k(t)$ сама является траекторией при описанном правиле управления, и вдоль нее неравенство (2.138) выполнено. Поэтому равенство $x^{k'}(t') = \tilde{d}_1^{k'}(t')$ для какого-то момента (k', t') влечет равенства $x^k(t) = \tilde{d}_1^k(t)$ для всех моментов (k, t) , лежащих справа от (k', t') .

Далее, справедливо неравенство $x^1(1) \geq \tilde{d}_1^1(1)$, и отсюда $x^k(t) \geq \tilde{d}_1^k(t)$ для всех $t=1,2,\dots,T$, $k=1,2,\dots,n$.

Итак, равенство $x^k(t+1) = x^-$ выполняется лишь при условии $\tilde{d}_1^k(t+1) = x^-$, но вдоль траектории $\tilde{d}_1^k(t+1)$ условие (2.138) выполнено; тем более оно будет выполнено вдоль траектории $x^k(t)$.

В силу отмеченной выше монотонной зависимости траектории от значения диспетчера, имеем $\overset{=k}{x}(t) \geq x^k(t)$ для всех $t=1,2,\dots,T$, $k=1,2,\dots,n$. Поэтому равенство $\overset{=k}{x}(t+1) = x^-$ влечет равенство $x^k(t+1) = x^-$, и попуск вдоль траектории $\overset{=k}{x}(t)$ в этот момент будет не меньше попуска вдоль траектории $x^k(t)$. Следовательно, неравенство (2.138) будет выполнено и вдоль траектории $\overset{=k}{x}(t)$. **Т е о р е м а доказана.**

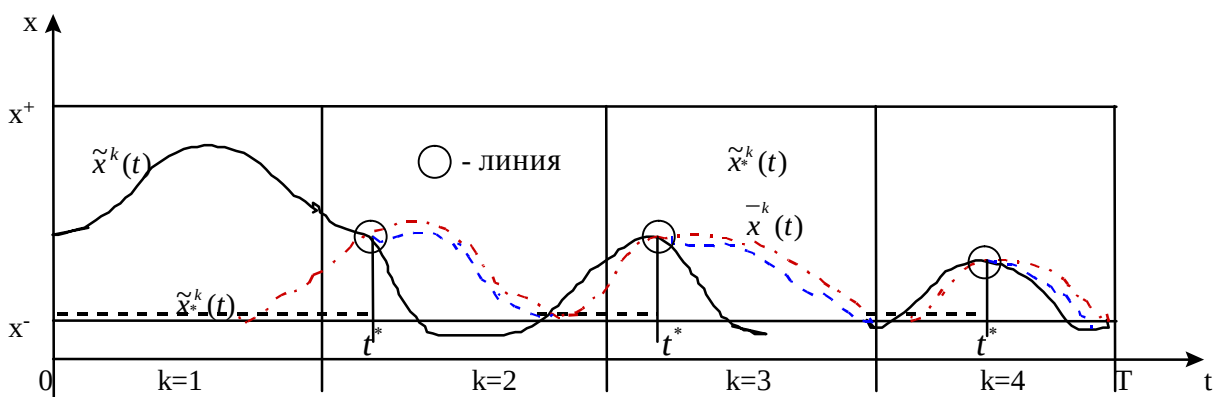


Рис.27. Геометрическая интерпретация методики построения линии $d_2(t)$.

Диспетчерские линии $d_1(t)$ и $d_2(t)$ разделяют множество всех возможных состояний водохранилища на зоны, в каждой из которых приписаны определенные попуски из водохранилищ (см. рис.28).

Резюмируя все сказанное относительно методики построения диспетчерских линий $d_1(t)$ и $d_2(t)$, отметим следующее:

- ❖ Предложенная методика построения диспетчерской линий $d_1(t)$ дает максимальную обеспеченность полной гарантированной нормы отдачи $P_u^{\max}$, при этом не учитывается сниженная ирригационная норма отдачи.
- ❖ При использовании линий $d_1(t)$ и $d_2(t)$ в решении ирригационной задачи, когда сверх $d_1(t)$ (зона избытков) можно в принципе назначить произвольную отдачу, ниже $d_1(t)$ - полную норму отдачи, а ниже $d_2(t)$ - сниженную норму отдачи, получаем обеспеченность P_u^* , которая удовлетворяет неравенству

$$P_u^* \leq P_u^{\max}. \quad (2.139)$$

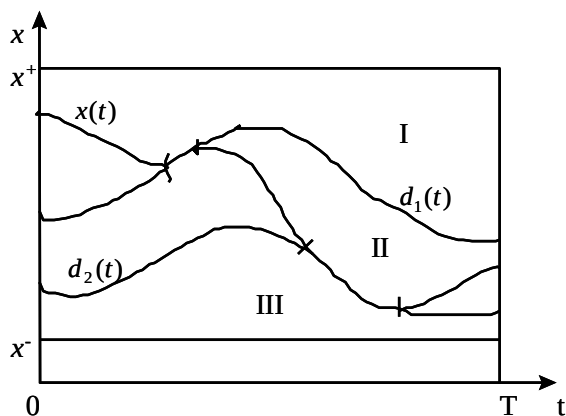


Рис. 28. Обозначения:

- I - зона избытков,
- II - зона полной гарантированной отдачи,
- III - зона сниженной гарантированной отдачи.

В силу **Теоремы 5** гарантируется выполнение сниженной ирригационной нормы отдачи для всего ряда.

- ❖ В принципе можно найти точное решение ирригационной задачи - максимизировать обеспеченность полной ирригационной нормы отдачи при условии, что сниженная ирригационная норма отдачи выполняется для всех интервалов рассматриваемого ряда. Для этого достаточно в методике построения $d_1(t)$ в качестве ограничения снизу вместо x^- взять линию $d_2(t)$ (см.(2.132)).

Тогда, аналогично Теореме 8, можно доказать, что при назначении выше линий $d_1(t)$ произвольного попуска на любой траектории будет всегда выполняться сниженная ирригационная норма отдачи, а перебои полной отдачи могут иметь место только в заранее установленные моменты.

- ❖ Численные эксперименты показали, что обеспеченность полной ирригационной нормы отдачи в ирригационно-энергетической задаче (когда линий $d_1(t)$ строилась без учета $d_2(t)$) совпадала с рассчитанной при построении $d_1(t)$, то есть была максимально возможной.

Обобщенная схема. Рассмотрим схему приведения всех ирригационных требований к требованиям нижнего бьефа объединенного водохранилища. Предполагается, что из объединенного водохранилища всегда назначается минимально необходимый попуск $u_{\min}(t)$.

В верхнем и нижнем бьефе третьего водохранилища предъявляются ирригационные требования $\bar{u}_2^l(t)$ и $\bar{u}_3^l(t)$, $l=1,2$, соответственно.

Частично эти требования удовлетворяются за счет боковой приточности, а дефициты покрываются за счет сработки объединенного водохранилища.

Определим величину дефицита в верхнем бьефе третьего водохранилища при условии, что сверху поступает $u_{\min}(t)$, как

$$\delta_i^k(t) = \max\left\{\left(\bar{u}_2^l(t) - v_3^k(t)\right), 0\right\}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.140)$$

Результирующий приток к третьему водохранилищу определяется как

$$\tilde{v}_3^k(l, t) = \max\left\{\left(v_3^k(t) - \bar{u}_2^l(t)\right), 0\right\}, \quad t = \overline{1, T}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = 1, 2,$$

где $\bar{u}_2^l(t)$ - полные либо сниженные ирригационные требования в верхнем бьефе третьего водохранилища при $l=1$ и $l=2$ соответственно, $v_3^k(t)$ - боковая приточность к третьему водохранилищу в k -м году за интервал t .

Дефицит в нижнем бьефе третьего водохранилища определяется следующим образом. Определим динамику состояния третьего водохранилища следующим балансовым соотношением

$$x_3^k(t+1) = x_3^k(t) + \tilde{v}_3^k(l,t) + u_{\min}(t) - \bar{u}_3^l(t), \quad (2.141)$$

$$\begin{cases} x_3^1(1) = x_3^+, \\ x_3^{k+1}(1) = x_3^k(T+1), \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \tilde{v}_3^k(l,t) \geq 0, \quad u_{\min}(t) \geq 0, \quad t = \overline{1, T}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = 1, 2 \end{cases} \quad (2.142)$$

$$x_3^- \leq x_3^k(t) \leq x_3^+. \quad (2.143)$$

Тогда в каждый момент (k,t) дефицит нижнего бьефа определяется как

$$\Delta_l^k(t) = \max \left\{ \left(x_3^- - x_3^k(t) - \tilde{v}_3^k(l,t) + \bar{u}_3^l(t) \right), 0 \right\}, \quad t = \overline{1, T}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = 1, 2 \quad (2.144)$$

где $x_3^k(t)$ – объем третьего водохранилища в k -м году за интервал t .

Таким образом, ирригационные нормы отдачи в нижнем бьефе объединенного водохранилища с учетом (2.140) и (2.144) равны

$$\bar{u}_l^k(t) = \bar{u}_1^l(t) + u_{\min}(t) + \delta_l^k(t) + \Delta_l^k(t), \quad t = \overline{1, T}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = 1, 2, \quad (2.145)$$

где $\delta_l^k(t)$ и $\Delta_l^k(t)$ – соответственно определяют дефицит водных ресурсов в верхнем и нижнем бьефе Туямуюнского водохранилища, которое расположено на территории Республики Узбекистан. Следовательно, их сумма определяет потребности этой сопредельной республики к дополнительному попуску из Вашского каскада.

Таким образом, ирригационные требования в нижнем бьефе объединенного водохранилища полностью определяются ирригационным требованием соседнего государства, последнее, в свою очередь, определяет требование к каскаду в целом.

Метод решения ирригационно-энергетической задачи.
Задача В. На первом этапе рассматривается первая ирригационно-энергетическая задача (В), то есть на множестве решения ирригационной задачи (2.108) – (2.110) и при фиксированном правиле распределения регулирующих функции между гидроузлами требуется максимизировать уровень суммарной гарантированной мощности при условии выполнения сниженного энергетического требования для всех интервалов в ряду.

Поддержание обеспеченности полной и сниженной отдачи на уровне, найденном в ирригационной задаче, осуществляется здесь за счет того, что попуск из второго водохранилища назначается в соответствии с найденными диспетчерскими линиями по текущему значению суммарного объема.

Выполнение энергетических требований осуществляется за счет увеличения попуска из первого водохранилища; в тех же случаях, когда значение суммарного объема воды в водохранилищах попадает в зоны избытков - и за счет увеличения попуска из второго водохранилища.

Для решения первой ирригационно-энергетической задачи организуется итерационный процесс по значениям критериального показателя β (см. задачу В, (2.111)-(2.113)). На каждом шаге при фиксированном значении β по описываемым ниже правилам определяются попуски $\tilde{u}_1^k(t)$, $\tilde{u}_2^k(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, $k = 1, 2, \dots, n$ и проверяется выполнение ограничений (2.113). В качестве следующего значения β берется полусумма максимального значения β , при котором ограничение (2.113) выполнялось для всех (k, t) , и минимального значения β , для которого установлено нарушение ограничения (2.113). Очевидно, итерационный процесс сходится к максимальному значению критериального показателя $\beta = \beta^{\max}$, при котором всегда выполняется ограничение (2.113), так как задача решается на множестве решения задачи А, а теорема 5 доказывает разрешимость последнего.

Основная схема определения попусков $\tilde{u}_i^k(t)$, $i = 1, 2$, $t = \overline{1, T}$, $k = \overline{1, n}$, из верхних водохранилищ при решении задачи В заключается в следующем. По значениям $d_1(t)$ и $d_2(t)$ определяем попуск $\tilde{u}_2^k(t)$. В соответствие с фиксированным правилом распределения регулирующих функций между водохранилищами (см. п. IV) и по найденному значению $\tilde{u}_2^k(t)$ определяется попуск $\tilde{u}_1^k(t)$:

$$\tilde{u}_1^k(t) = u_1^{\min}(t) + \max(0, x_2^- - x_2^k(t) - v_2^k(t) - u_1^{\min}(t) + \tilde{u}_2^k(t)).$$

По найденным значениям $\tilde{u}_1^k(t)$, $\tilde{u}_2^k(t)$ определяется выработка электроэнергии $N_i^k(t)$, $i = 1, 2$, по формуле (2.101).

Если ограничение (2.113) выполняется, то принимается $\tilde{u}_i^k(t) = \tilde{u}_i^k(t)$, $i = 1, 2$. Если ограничение (2.113) нарушается, то увеличиваем попуск из водохранилищ сверх первоначально найденных значений $\tilde{u}_i^k(t)$:

$$\tilde{u}_i^k(t) = \tilde{u}_i^k(t) + \Delta_i(\delta), \quad i = 1, 2 \quad (2.146)$$

Приращения попусков определяется следующим образом:

$$\Delta_1(\delta) = \min\left(0, \underline{x}_1^k(t+1) - x_1^-\right), \quad (2.147)$$

$$\Delta_2(\delta) = \max\left(0, \underline{x}_2^k(t+1) + \Delta_1(\delta) - x_2^+\right) + \max\left(0, \delta - \Delta_1(\delta)\right), \quad (2.148)$$

где $\underline{x}_i^k(t+1)$ – наполнения i -го водохранилища при попусках $\tilde{u}_1^k(t)$, $\tilde{u}_2^k(t)$.

Параметр δ лежит в пределах $0 \leq \delta \leq \delta^*$; его изменение совместно с формулами (2.146) - (2.148) задает порядок сработки водохранилищ при выполнении ограничений на суммарную мощность, описанный в п.IV.

Значение δ^* определяется из условия

$$\Delta_2(\delta^*) = \max\left(0, \underline{x}_1^k(t+1) + \underline{x}_2^k(t+1) - d_1(t+1)\right), \quad (2.149)$$

то есть увеличивать попуск сверх $\tilde{u}_2^k(t)$ разрешается лишь тогда, когда суммарный объем превышает значение первого диспетчера. При использовании в формуле (2.101) величины $\tilde{u}_i^k(t)$, $i=1,2$, суммарная мощность будет монотонно возрастающей функцией δ . Поэтому либо найдется некоторое $\delta_{\min}$, такое, что при $\delta \geq \delta_{\min}$ выполняется ограничение (2.113), либо это ограничение не выполняется даже при $\delta = \delta^*$.

В последнем случае значение параметра β на следующей итерации уменьшается. Заметим, что выполнение условия (2.149) достаточно, чтобы обеспеченность ирригационных отдач в решении ирригационно-энергетической задачи не уменьшалась.

Задача С. На втором этапе рассматривается решение задачи С, то есть на множестве решений задачи В требуется максимизировать обеспеченность выполнения полной гарантированной суммарной мощности:

$\bar{N}_r^1(t) = \beta^{\max} \cdot \eta(t)$, где $\beta^{\max}$ найдена при решении первой ирригационно-энергетической задачи.

Обозначим через $X(\beta^{\max})$ траекторию наполнения водохранилищ, реализовавшуюся при решении задачи В. Здесь

$$X(\beta^{\max}) = \left\{ \overset{\circ}{x}_i^k(t; \beta^{\max}), t = 1, 2, \dots, T, k = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2 \right\}$$

Для решения задачи С построим сначала некоторую траекторию

$$X(\bar{N}_r^1) = \left\{ x_i^k(t; \bar{N}_r^1), t = 1, 2, \dots, T, k = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2 \right\}$$

на которой будет на отдельных участках поддерживаться уровень мощности $\bar{N}_r^1(t)$, однако при этом возможно нарушение как условия

$$N^k(t) \geq \bar{N}_r^1(t), \quad (2.150)$$

так и ограничений (2.113). Затем траектория $X(\bar{N}_r^1)$ будет модифицироваться таким образом, чтобы исключить нарушение ограничения (2.113).

Попуски при построении траектории $X(\bar{N}_r^1)$ выбираются по формулам (2.146) - (2.148), применяемым в задаче В. Однако в каждом интервале при выборе пуска сначала проверяется выполнение ограничения (2.150), если не удастся выполнить это ограничение, то проверяется возможность выполнения ограничения (2.114) при $\beta = \beta^{\max}$.

Если ограничение (2.150) нарушается при пусках $\tilde{u}_1^k(t)$ и $\tilde{u}_2^k(t)$, то применяется следующая процедура.

В момент (k, t) вычисляется суммарная мощность $N_*^k(t)$ при пуске, найденном по формуле (2.146) при $\delta = \delta^*$, где δ^* определяется из (2.149).

- а). Если $N_*^k(t) \geq \bar{N}_r^1(t)$, то на интервале (k, t) выбирается такое $\delta \leq \delta^*$ и соответствующий этому значению δ пуск $\tilde{u}_1^k(t)$, при которых выполняется $N^k(t) = \bar{N}_r^1(t)$.
- б). Если $\bar{N}_r^2 \leq N_*^k(t) \leq N_r^1(t)$, то на интервале (k, t) выбирается пуск, при котором выполняется $N^k(t) = \bar{N}_r^2(t)$.
- в). Наконец, при $N_*^k(t) < \bar{N}_r^2(t)$ принимается пуск, соответствующий $\delta = \delta^*$, и таким образом, на интервале (k, t) выполнено $N^k(t) = N_*^k(t) < \bar{N}_r^2(t)$.

После построения траектории $X(\bar{N}_r^1)$ выделяются интервалы, когда реализуется случай в). Каждую группу смежных выделенных интервалов будем называть выделенным участком. Для каждого выделенного участка проводится процедура модификации траектории $X(\bar{N}_r^1)$, направленная на устранение нарушений ограничения (2.113).

Обозначим через (k^*, t^*) последний интервал рассматриваемого выделенного участка, а через (k°, t°) - ближайший предшествующий

выделенному участку интервал, когда на траектории $\overset{\circ}{X}(\beta^{\max})$ выполняется ограничение (2.150). Справедлива следующая

Теорема 7. *Существует хотя бы одна точка переключения (k', t') и соответствующая ей допустимая траектория $\hat{X}$, на которой выполняется ограничение*

$$\hat{N}^k(t) \geq \bar{N}_A^2(t), \quad \forall (k, t) = \{(k^*, t^*), \dots, (k', t')\}. \quad (2.151)$$

Доказательство. Действительно, начиная с интервала (k^*, t^*) , при конечных значениях наполнения $x_i^{k^*}(t^*, \bar{N}_r^1), i=1,2$ ходом назад можно строить траекторию

$$\hat{X} = \{\hat{x}_i^k(t), \quad \forall (k, t) = (k^*, t^*), \dots, (k', t'), i=1,2\} \quad (2.152)$$

в соответствии с балансовыми соотношениями (отныне и далее все обозначения со значком " $\wedge$ " относятся к допустимой траектории $\hat{X}$):

$$\begin{cases} \hat{x}_1^k(t) = \hat{x}_1^k(t+1) + \hat{u}_1^k(t) - v_1^k(t), \\ \hat{x}_2^k(t) = \hat{x}_2^k(t+1) + \hat{u}_2^k(t) - \hat{u}_1^k(t) - v_2^k(t), \end{cases} \quad (2.153)$$

$$x_i^- \leq \hat{x}_i^k(t) \leq x_i^+, i=1,2, \quad \forall (k, t) = (k^*, t^*), \dots, (k', t') \quad (2.154)$$

и ограничениям

$$\hat{u}_1^k(t) \geq u_1^{\min}(t), \quad (2.155)$$

$$\hat{u}_2^k(t) = u_2^k(t; \bar{N}_A^1), \quad (2.156)$$

где $u_2^k(t; \bar{N}_r^1)$ - попуск из второго водохранилища, реализовавшийся в интервале (k, t) на допустимой траектории $X(\bar{N}_r^1)$. Условие (2.156) означает, что на траектории $\hat{X}$ суммарный объем двух водохранилищ будет таким же, как и на траектории $X(\bar{N}_r^1)$:

$$\hat{x}_1^k(t) + \hat{x}_2^k(t) = x_1^k(t; \bar{N}_A^1) + x_2^k(t; \bar{N}_A^1).$$

Обозначим

$$\overset{\circ}{u}_1^k(t) = \max \{u_1^{\min}(t); x_1^- - \hat{x}_1^k(t+1) + v_1^k(t); \hat{x}_2^k(t+1) + \hat{u}_2^k(t) - v_2^k(t) - x_2^-\}.$$

Попуск $\overset{\circ}{u}_1^k(t)$ обеспечивает выполнение ограничений (2.154) - (2.156).

При попуске $\hat{u}_1^k(t) = \overset{\circ}{u}_1^k(t)$ и соответствующих значениях $\hat{x}_1^k(t)$ из формул (2.153) проверяем выполнения ограничения (2.151). Если оно выполняется, то принимаем $\hat{u}_1^k(t) = \overset{\circ}{u}_1^k(t)$. В противном случае назначаем следующую поправку $\hat{u}_1^k(t) = \overset{\circ}{u}_1^k(t) + \Delta$, где $0 \leq \Delta \leq \Delta^*$. Суммарная мощность $\hat{N}^k(t)$ будет возрастающей функцией Δ .